This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Esta é uma cópia digital de um livro que foi preservado por gerações em prateleiras de bibliotecas até ser cuidadosamente digitalizado pelo Google, como parte de um projeto que visa disponibilizar livros do mundo todo na Internet.

O livro sobreviveu tempo suficiente para que os direitos autorais expirassem e ele se tornasse então parte do domínio público. Um livro de domínio público é aquele que nunca esteve sujeito a direitos autorais ou cujos direitos autorais expiraram. A condição de domínio público de um livro pode variar de país para país. Os livros de domínio público são as nossas portas de acesso ao passado e representam uma grande riqueza histórica, cultural e de conhecimentos, normalmente difíceis de serem descobertos.

As marcas, observações e outras notas nas margens do volume original aparecerão neste arquivo um reflexo da longa jornada pela qual o livro passou: do editor à biblioteca, e finalmente até você.

Diretrizes de uso

O Google se orgulha de realizar parcerias com bibliotecas para digitalizar materiais de domínio público e torná-los amplamente acessíveis. Os livros de domínio público pertencem ao público, e nós meramente os preservamos. No entanto, esse trabalho é dispendioso; sendo assim, para continuar a oferecer este recurso, formulamos algumas etapas visando evitar o abuso por partes comerciais, incluindo o estabelecimento de restrições técnicas nas consultas automatizadas.

Pedimos que você:

- Faça somente uso não comercial dos arquivos.
  A Pesquisa de Livros do Google foi projetada para o uso individual, e nós solicitamos que você use estes arquivos para fins pessoais e não comerciais.

- Evite consultas automatizadas.
  Não envie consultas automatizadas de qualquer espécie ao sistema do Google. Se você estiver realizando pesquisas sobre tradução automática, reconhecimento ótico de caracteres ou outras áreas para as quais o acesso a uma grande quantidade de texto for útil, entre em contato conosco. Incentivamos o uso de materiais de domínio público para esses fins e talvez possamos ajudar.

- Mantenha a atribuição.
  A "marca dágua" que você vê em cada um dos arquivos é essencial para informar as pessoas sobre este projeto e ajudá-las a encontrar outros materiais através da Pesquisa de Livros do Google. Não a remova.

- Mantenha os padrões legais.
  Independentemente do que você usar, tenha em mente que é responsável por garantir que o que está fazendo esteja dentro da lei. Não presuma que, só porque acreditamos que um livro é de domínio público para os usuários dos Estados Unidos, a obra será de domínio público para usuários de outros países. A condição dos direitos autorais de um livro varia de país para país, e nós não podemos oferecer orientação sobre a permissão ou não de determinado uso de um livro em específico. Lembramos que o fato de o livro aparecer na Pesquisa de Livros do Google não significa que ele pode ser usado de qualquer maneira em qualquer lugar do mundo. As conseqüências pela violação de direitos autorais podem ser graves.

Sobre a Pesquisa de Livros do Google

A missão do Google é organizar as informações de todo o mundo e torná-las úteis e acessíveis. A Pesquisa de Livros do Google ajuda os leitores a descobrir livros do mundo todo ao mesmo tempo em que ajuda os autores e editores a alcançar novos públicos. Você pode pesquisar o texto integral deste livro na web, em `http://books.google.com/`

NEDL TRANSFER
HN 64AA R
KG
5028

cl49

Ao Ex.mo Sr. Com.dor Manoel José Monteiro
Offerece
Em testemunho de amizade e consideração
João de Sousa Moreira
Rio de Janeiro 30 de Maio de 1886.

JUROS COMPOSTOS

RENDAS E ANNUIDADES

E

AMORTISAÇÃO

João de Souza Moreira.

LITH. MOREIRA MAXIMINO & C.

TRATADO CO

THEOR

OS COMPOSTOS

RIO DE JA

1884

dom

TRATADO COMPLETO

THEORICO E PRATICO

SOBRE OS

JUROS COMPOSTOS, RENDAS E ANNUIDADES,

E

AMORTIZAÇÃO

POR

João de Sousa Moreira

COMMENDADOR DA REAL ORDEM DE CHRISTO
FUNDADOR DA SOCIEDADE DE SEGUROS SOBRE A VIDA
— CAIXA GERAL DAS FAMILIAS. —

When the first principles of any art or science are firmly fixed and rooted in the mind, their application soon becomes easy, pleasant and obvious.

BONNYCASTLE

RIO DE JANEIRO
TYPOGRAPHIA—MONTENEGRO—RUA NOVA DO OUVIDOR N. 16
1881

A' ANTIGA, MUITO NOBRE, SEMPRE LEAL E INVICTA

CIDADE DO PORTO

MINHA PATRIA QUERIDA

João de Sousa Moreira.

KG5028

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

PROLOGO

No meu longo funccionalismo commercial varias questões a resolver se me offerecêrão sobre juros compostos, annuidades, e amortização de capital mutuado e seus juros, em determinados prazos. Conservava porem dessas questões notas esparsas sem nexo, sem os indispensaveis esclarecimentos, de sorte que serião fragmentos inintelligiveis e perdidos se não fossem systematicamente colligidos, coordenados e devidamente elucidados (1). Assomou a ideia que tal coordenação não seria inutil; seria mesmo muito util ao publico, e cheia de actualidade: agora, em que o insaciavel anhelo de progresso e bem-estar excita a actividade humana ao desenvolvimento de grandes empresas de viação accelerada, d'industrias, fabril e agricola; desenvolvimento que descobre largos horizontes para o emprego de capitaes, que mutuados, deva ser a divida amortizada em prazos e condições variadas; accrescendo a isto a carencia em que estamos de livros elementares sobre estes assumptos. A opportunidade pareceu-me incontestavel.

Cresceu e tomou vulto o que a principio era apenas uma velleidade de coordenar os manuscriptos, e offerecer ao publico (de quem espero benigno acolhimento), *um tratado theorico e pratico sobre os juros compostos, rendas e annuidades, e amortização.*

E porque não concorreria eu para a sumptuosa fabrica do magnifico *Templo da Litteratura* com mais uma pequena pedra, a qual, se por falta de ornamentação, não pode, fazendo parte da fachada, realçar-lhe a belleza magestosa, não será comtudo menos util na construcção das muralhas?

Preoccupava-me porem o espirito a ideia da repulsão que geralmente se observa, mesmo entre pessoas illustradas, pelo calculo algebrico: o que seria formidavel obstaculo para o acolhimento favoravel de um tratado onde este calculo é indispensavel em muitas soluções. Comtudo,

(1) Para o calculo de rendas e capitaes instituidos sobre as contingencias da vida humana, publiquei em 1859 um *Ensaio sobre os Seguros sobre a vida.*

progredia a coordenação dos manuscriptos; e á ideia dessa repulsão eu oppunha a ideia de que os leitores procurarião benevolamente vencel-a desde que considerassem o que seria a astronomia, a navegação, a mecanica, e qual seria o gráo de civilização da humana sociedade, se não fossem os elementos de analyse e de calculo mathematico; pois que quasi todas as obras d'arte e invenções humanas lhes devem a origem e aperfeiçoamento?

Occorria-me ainda o alvitre de traduzir em linguagem vulgar, onde isso fosse possivel, os resultados da analyse; mas nisto ha outro escolho: aquelles para quem a algebra á familiar acharião prolyxas as explicações; por outro lado talvez julgadas insufficientes pelos não versados nessa sciencia.

Prevaleceu porem este ultimo systema. Aos que são versados na algebra peço que relevem o que, depois das demonstrações, lhes parecer prolixo; pois não é porque eu deixe de acatar o preceito de Horacio,

Quidquid præcipies, esto brevis . . . . .

mas porque sendo os não versados os que mais precisão das regras do presente tratado (porque os primeiros estão habilitados a estabelecel-as pelos principios geraes da sciencia), a respeito dos segundos, muito devo receiar-me do attractivo da concisão:

. . . . . brevis esse laboro,
Obscurus fio.

Áquelles que tem tédio da algebra peço que me permittão o emprego das suas formulas; porque sem ellas seria, se não impossivel, pelo menos extremamente difficil obter a solução de certos problemas; e chego a esperar que, convencidos do seu imprescindivel auxilio, e magna efficacia no progresso das sciencias e em geral na rectidão das operações do entendimento, disponhão o espirito a aceital-as benevolamente, cultivando o seu estudo e vulgarizando-o. « E' certo que os primeiros principios de uma sciencia são pouco attrahentes, são mesmo enfadonhos; mas desde que os principios forem firmemente fixados e radicados no espirito, a sua applicação logo se torna facil, agradavel e manifesta.»

When the first principles of any art or science are firmly fixed and rooted in the mind, their application soon becomes easy, pleasant and obvious.

BONNYCASTLE.

Se eu conseguir mitigar algum tanto essa repulsão pelos elementos de analyse e de calculo, terei prestado um duplo serviço.

Entrego pois ao prelo o presente *Tratado*, confiado em que é justo titulo á benevolencia do publico o desejo de ser-lhe util, unico movel para trabalhos deste genero, que entre nós não achão retribuição condigna. Procurei elucidar as questões com numerosos exemplos, para cuja solução não poupei trabalho afim de pôr a pratica ao alcance de todos.

Por ser interessantissimo o assumpto, precede o *Tratado* uma *Noticia sobre a usura e o anatocismo.*

Seguem o *Tratado* algumas *notas* em que os estudiosos hão de achar util diversão.

Como complemento quasi indispensavel a tratados deste genero, addicionei ao texto grande numero de Taboas (umas que já tem sido publicadas, outras que de todo calculei ou ampliei), ás taxas de juro mais usuaes, e outras taxas mais baixas convenientes para o calculo de annuidades pagaveis por fracções, que, empregadas segundo as regras, facilitaráõ immensamente os calculos na maxima parte das questões. Preferi as Taboas numericas ás Taboas logarithmicas, 1.º, porque ha muitos que não sendo versados no calculo logarithmico se acharião privados do auxilio das Taboas; 2.º, porque é muito facil com o numero tabular calcular o logarithmo de 7 e 8 decimaes, mas muito laborioso com o logarithmo calcular o numero com 8 decimaes, como são os das Taboas: assim é que os logarithmos dos numeros das Taboas I e II podem se ter muito facilmente por meio dos logarithmos da Taboa VII; e os logarithmos dos numeros das Taboas III, IV e V, por meio dos logarithmos da Taboa VI que se achão ao lado das quantidades numericas. E ainda em muitos casos *o arithmometro de Thomaz de Colmar* offerece um optimo meio de executar grandes multiplicações e divisões com menos fadiga do que com os logarithmos, e sem risco de erro.

Rio de Janeiro, 1883.

João de Sousa Moreira.

NOTICIA HISTORICO-PHILOSOPHICA

SOBRE

A USURA E O ANATOCISMO

Não desagradará ao leitor uma vista de relance sobre a questão — *usura* — assumpto de tantos e tão grandes volumes que se tem escripto *pro e contra* (1). Bastaráõ algumas citações para dar ideia desse dédalo de opiniões e controversias.

Em muitos estados foi o juro prohibido pelas leis, devido isto á subserviencia a moralistas e casuistas que, movidos por um zelo excessivo que só se preoccupava com o mysticismo, fundamentavão o direito sobre verdades de convenção e subtilezas escolasticas, deixando em completo olvido o interesse publico e o progresso da humanidade.

A prevenção em favor de autoridades que se impoem, seja pela educação, seja por preconceitos de qualquer natureza, tem mantido durante seculos a ferro e a fogo erros, sem outra razão mais do que a que davão os discipulos de Pythagoras: « *O mestre disse* ». Esta capital presenciou que por eu haver demonstrado em 1871 os erros das formulas do *Montepio Geral* que o conduzião inevitavelmente á ruina (2), tive em troca de tão relevante serviço o ser exposto á execração publica *como sacrilego demolidor desse estabelecimento.* A prevenção assim o acreditava, somente *porque os mestres o dissérão.*

O desmoronamento occorrido em 1882 trouxe o desengano!

---

(1) Das conferencias ecclesiasticas ordenadas pelo arcebispo de Pariz (1697), só as que tratão da *usura* enchem 4 volumes de 500 paginas.

Darbel dá noticia de cerca de 170 principaes autores.

(2) *Juizo Critico sobre o Montepio Geral* publicado no *Jornal do Commercio* em 1871 em 1872, e em brochura em 1880.

Isto mostra quanto devemos procurar libertar-nos da demasiada submissão a opiniões, por mais autorizadas que sejão, submettendo tudo a uma critica judiciosa para não incorrermos na censura do poeta:

At nostri proavi Plautinos et numeros, et
Laudavére sales — Nimium patienter utrumque
(Ne dicam stulte) mirati.

HORACIO — *De Art. Poet.*

I — USURA

Entre os Romanos e nos primeiros seculos da Igreja designava-se o juro pela palavra *usura:* termo adequado. Esta palavra é latina; e vem de *usus*, uso. Era o aluguel que se pagava pelo *uso* ou goso da coisa emprestada, e significava *juro* quando a coisa emprestada era dinheiro. Com effeito, o juro é o aluguel do dinheiro; e por isso tambem se disse: *locare nummos*, *conducere nummos*, alugar dinheiro, tomar dinheiro de aluguel. Depois, por causa dos abusos, tomou-se a palavra *usura* em mao sentido: no sentido de juro excessivo, aladroado. Hoje porem o *Codigo Civil Portuguez* tem rehabilitado a palavra *usura* na sua primitiva significação e emprego (1).

Nas outras linguas, e desde tempos muito remotos, tem-se representado o interesse do emprestimo pela ideia de producção, e neste sentido havia tambem em latim a palavra *fœnus*.

Os theologos interpretavão certas passagens da *Biblia* como prohibindo o juro, que consideravão essencialmente injusto. Lê-se por exemplo no *Deuteronomio: Não emprestarás com usura a teu irmão nem dinheiro, nem grão, nem outra qualquer coisa que seja; mas somente ao estrangeiro* (2).

---

(1) « Art. 1636. - Dá-se o contrato de usura, quando alguem cede a outrem dinheiro, ou qualquer outro objecto fungivel, com obrigação de restituir uma somma equivalente ou um objecto igual, mediante certa retribuição em dinheiro ou em coisas de outra especie.

Cod. Civ. Port

(2) « Non fœnerabis fratri tuo ad usuram pecuniam, nec fruges nec quamlibet aliam rem; sed alieno. »

DEUT. *XXIII, 19 e 20.*

Não levarás juro ao teu irmão, mas ao estrangeiro. Logo, a prohibição não era absoluta: e se o acto era permittido para com o estrangeiro, não pode ser peccaminoso em si.

Entretanto *S. Thomaz d'Aquino*, que floresceu no 13.º seculo, cognominado *o anjo da escola*, á questão de como se devem entender estas palavras responde que, *receber a usura de quem quer que seja é praticar o mal. Que não foi concedido como licito aos Judeus o receberem usuras dos estrangeiros; mas permittido, para evitar maior mal: o de receberem-nas dos seus irmãos, adoradores de Deus, por causa da avareza a que erão dados* (1).

Santo Ambrosio, que floresceu no 4.º seculo, explica de modo singular a faculdade concedida aos Judeus: *Sed alieno.*

Quem erão os estrangeiros, diz elle, *senão Amalech, os Amorrheus, os inimigos? Exige a usura daquelle a quem não seja crime matar. Sem armas peleja o que exige a usura* . . . . . .

Logo, onde ha o direito da guerra, ha tambem o direito da usura (2).

Alludia á ordem de passarem todos os *Amorrheus* ao fio da espada, *Sed interficies in ore gladii.... Amorrheum....* (*Deut.* XX, 17); e então considerada a usura como um roubo, se os Judeus tinhão direito de matar os Amorrheus, terião o direito de os roubar. Mas a isto se oppunha o *Deuteronomio* VII, 2, não celebrarás concerto algum com elles, *Non inibis cum eis fœdus.* E a respeito de *Amalech*, 1.º dos Reis XV, 3, nem cubices coisa alguma sua,... *et non concupiscas ex rebus ipsius aliquid.*

Que estrangeiro não era synonimo de inimigo nos diz o *Exodo* (3).

Dos termos com que nas linguas antigas se designava a *usura* tirávão argumento contra ella. De um termo hebraico (havia dois, *Neschech*

---

(1) « Accipere usuram à quocumque homine est simpliciter malum....

Quod autem ab extraneis usuram acciperent, non fuit Judæis concessum quasi licitum' sed permissum ad majus malum vitandum: ne scilicet á Judæis Deum colentibus usuras acciperent propter avaritiam cui dediti erant »

S. THOMAZ D'AQ. *Compilação de Bancel.* VERBO *Usura* — QUÆST. II.

(2) « Quis erat tunc alienigena, nisi Amalech, nisi Amorrheus, nisi hostes? . . . .

Ab hoc usuram exige, quem non sit crimen occidere. Sine ferro dimicat qui usuram flagitat....

Ergo ubi jus belli, ibi etiam jus usuræ. »

SANTO AMBROSIO. *De Tobia. Cap. XV.*

(3) « Advenam non contristabis, neque affliges eum: advenæ enim et ipsi fuistis in terra Ægypti. »

Exodo XXII, 21.

e *Tarbit*) (1), a *usura* era malefica como a mordedura (*Neschech*) da serpente. Do termo grego (τόκος, *parto*, *producção*), a *usura* era pungente como as dores do parto (2).

Ha comtudo passagens na *Biblia* que autorizão o juro e até o recommendão. No *Ecclesiastico* XXIX, 1, diz-se: *Aquelle que faz mizericordia empresta* A JURO (*fœneratur*) *ao seu proximo* (3)

S. Thomaz d'Aquino diz que *fœnus* se entende aqui e em outros lugares da *Biblia* por *mutuo*.

Mas como poderá tomar-se *fœnus pro mutuo* na passagem em que Christo chama servo mao ao que não tinha feito render, entregando-o aos banqueiros, o dinheiro que o senhor lhe confiára (4) ?

A prohibição da usura no *Deuteronomio* só pode entender-se como uma lei civil particular aos Judeus, e não como um principio de moral universal. No *Levitico* e no *Deuteronomio* ha muitas disposições para os Judeus a respeito da escravidão, do casamento e do repudio, que hoje repelliriamos. E' este o pensamento do *Dr. Paley*, theologo do seculo passado, merecidamente celebre na Inglaterra (5).

A palavra *mutuo* é formada de *meus*, o meu, e *tuus*, o teu; porque, dizião, o meu se torna teu: *Ab eo quod de meo tuum fiat*. Portanto ha transferencia de dominio do dinheiro que o mutuario toma a seu

---

(1) « Quo loco (Levitico XXV, 36) tamen in pecunia prohibetur utrumque, NESCHECH et TARBIT (Hebraicè), id est, usura et usura, altera À MORSU, altera AB AMPLIFICANDO vocata. »

SALMASIUS. *De Usuris. Cap. XX.*

(2) « Echidna quædam est fœneratoris pecunia, quæ tanta mala parturit....

Ibi dolores ut parturientis; unde etiam τόκους Græci appellaverunt usuras, eo quod dolores partus animæ debitoris excitare videantur. »

SANTO AMBROSIO — *De Tobia. Cap. XII.*

(3) « Qui facit misericordiam, fœneratur proximo suo ».

Eclesiast. XXIX, 1.

(4) « Oportuit ergo te committere pecuniam meam nummulariis, et veniens ego recepissem utique quod meum est cum usura. »

S. MATHEUS *XXV, 27.*

(5) « This prohibition is now generally understood to have been intended for the Jews alone, as part of the civil or political law of that nation and calculated to preserve amongst themselves that distribution of property to which many of their institutions were subservient. »

Moral Philosophy. Vol. 1º (edição de 1821), *Cap. X.*

risco, e é obrigado a restituir integralmente: Donde, o mutuante não deve exigir mais do que o capital (1).

Nas doutrinas de *Aristoteles*, que subjugárão todos os espiritos, achárão irrecusavel o argumento de que o dinheiro não podendo por si mesmo produzir dinheiro, não era licito ao mutuante exigir qualquer interesse.

Erão estes os principaes argumentos juridicos.

O *Codigo Civil Portuguez* estabelece tambem o principio de transferencia de dominio (2), mas não chega á mesma conclusão; porque autoriza o juro: e convencional (art. 1640). E' evidente que o dominio que o mutuante transmitte ao mutuario tem lugar pela natureza de coisa fungivel como é o dinheiro. Coisa *fungivel* é a que, podendo ser substituida por outra (3), se gasta ou consome pelo uso: portanto, para que se conceda o uso é indispensavel transferir o dominio; mas o mutuario não é menos obrigado á solução da divida: logo, o que *realmente* se concedeu não foi senão o uso.

Pothier (no seculo XVIII) censura *Salmasio* por dizer que o mutuante retem o dominio, não da coisa individualmente, mas do seu valor considerado *indeterminate et abstrahendo à corporibus*. Diz que *Salmasio* confunde o—*jus in re*—com o—*jus ad rem*—. Que o *jus in re* segue a coisa onde quer que se ache, e não ha transferencia de dominio. Que o *jus ad rem*, pela transferencia do dominio, converte-se n'uma obrigação pessoal do mutuario.

Mas porque é obrigação pessoal do mutuario, será incompativel com a obrigação de elle pagar o uso que fez da coisa em seu proveito?

Alguns distinguírão o *emprestimo para consumo*, do *emprestimo para emprego rendoso*. Seria para o primeiro caso a prohibição da

---

(1) « Ille qui mutuat pecuniam, transfert dominium pecuniæ in eum cui mutuat; unde ille cui pecunia mutuatur, sub suo periculo tenet eam, et tenetur eam restituere integre: Unde non debet amplius exigere ille qui mutuavit. »

S. Th. de Aq.—*Obra citada*—Verbo *Usura*—*Quæst. XIV.*

(2) Art. 1523. O mutuario adquire a coisa emprestada, e por sua conta correrá todo o risco, desde o momento em que lhe for entregue.

Cod. Civ. Port.

(3) « Fungibiles, quia una alterius vice fungitur ».

Taylor.

usura na *Biblia*. As expressões do *Levitico*, XXV (1), parecem autorizar esta opinião. Mas seria permittida no segundo caso: por exemplo, no emprestimo a negociante para operações mercantis.

Ainda aqui os canonistas erão intransigentes. Teimavão em que no *mutuo* ha transferencia de dominio, e que pelo principio—*Res perit domino*—, *Res fructificat domino*—, a vantagem que possa advir ao negociante não é uma razão para exigir delle juros do dinheiro emprestado (2).

Santo Ambrosio, sempre armado de formidavel ariete contra a usura, exclama: *E julgas proceder piamente porque recebes a usura do negociante como participação de lucro? Elle defraudará no preço das mercadorias para te pagar a usura. Tu és autor, tu és participante da sua fraude: a ti aproveita o que elle defraudar* (3).

Geralmente os canonistas e jurisconsultos definírão a *usura*, « Tudo o que se exige alem do capital mutuado ». *Usura est quidquid ultra sortem exigitur.*

O doutissimo jurisconsulto portuguez *Paschoal José de Mello Freire*, que floresceu no seculo passado, definiu a *usura*: *Tudo o que se paga pelo uso de coisa que consta de pezo, numero ou medida, a quem por justa causa é devida.* E de perfeito accordo com a moral e a economia politica, accrescenta:

Tal usura não é prohibida pelo direito natural, divino ou humano se não for excessiva, NEM EXCEDER A JUSTA AVALIAÇÃO DO USO; *porque a usura é no mutuo, o que o aluguel é na locação; e portanto não menos licita* (4).

---

(1) « Si attenuatus fuerit frater tuus, et infirmus manu, et susceperis eum quasi advenam et peregrinum. et vixerit tecum; ne accipias usuras ab eo, nec amplius quam dedisti. »

Levit. XXV, 35, 36.

(2) .... *le profit que peut faire le commerçant sur l'argent que je lui ai prêté n'est pas une raison pour que je puisse exiger de lui des intérêts.*

POTHIER—*Du Prêt. n. 19.*

(3) « Et putas te pie facere, quia à negotiatore velut munus suscipis? Inde ille fraudem facit in mercium pretio, unde tibi solvit usuram. Fraudis illius tu auctor, tu particeps, tibi proficit quidquid ille fraudaverit. »

SANTO AMBROSIO—*De Tobia—Cap. XIV.*

(4) « Usuram dicimus *quidquid solvitur pro usu rei, alicui ex justa causa debitæ, quæ pondere, numero, et mensura constat*; adeoque in quantitate, seu abusu consistit. Talis usura neque jure naturali, neque divino, neque humano est prohibita, si immoderata non sit neque justam excedat usus æstimationem; namque idem in mutuo est usura, quod merces in locatione; itaque non minus licita. »

MELLO FREIRE. *Inst. Jur. Civ. Lusit. Lib. I Tit. 8 § 15.*

E' esta a verdadeira norma para a pratica da usura: *A justa avaliação do uso, isto é, a justa avaliação da cooperação do capital com o trabalho na producção.*

Entretanto o interesse, sentimento natural do homem, tanto que *Thomaz d'Aquino* admitte a usura exigida dos estrangeiros *propter avaritiam;* o interesse deve ser bem dirigido, mas não póde ser anniquilado (1). Não se pode impunemente contrarial-o: o capitalista, que por não praticar a usura não emprestasse o seu dinheiro, faria grande mal á sociedade; porque o emprestimo a juro é poderoso motor do commercio e das industrias. Mesmo o pobre soffreria, como observa *Leão VI*, o philosopho, imperador do oriente (seculo IX), na lei em que restabeleceu a permissão da usura, que seu pai, o imperador *Basilio*, tinha prohibido, dizendo que *tinha falhado o fim que o legislador se propuzera de melhorar a causa da pobreza; porque os capitalistas até então faceis no emprestimo pela espectativa da usura, não podendo tirar nenhum lucro depois da dita lei, tinhão-se tornado difficeis e deshumanos para com os que precisavão de dinheiro* (2).

Deu-se um caso semelhante no tempo d'el-rei *D. Affonso 4.º* de Portugal (seculo XIV). Este monarcha tendo prohibido a usura desde a publicação da lei (o que mostra que até então era permittida), promulgou posteriormente nova lei ordenando certas providencias contra os Judeus *que depois da prohibição da usura fazião outros contratos com os christãos, com que estes soffrião muito maior damno em seus haveres do que os que soffrião antes da dita prohibição* (3).

---

(1) Sem paixões o mundo se tornaria pavoroso ermo.

« Si omnes homines sapientes essent, mundus in solitudinem ac vastitatem redigeretur. »

Proverbio arabico. Traducção de SALMASIO.

(2) « Atqui propter paupertatem res illa non in melius, quem tamen finem legislator proposuerat, sed contra in pejus vergit. Qui enim antea usurarum spe ad mutuandam pecuniam prompti fuerunt, post latam legem, quod nihil lucri ex mutuo percipere possint, in eos qui pecuniis indigent, difficiles atque immites sunt..... egregium illud præscriptum abrogamus, ac in contrarium statuimus, ut æris alieni usus ad usuras procedat, idque quomodo veteribus legislatoribus placuit.... »

LEONIS. *Constitutio LXXXIII.*

(3) « El-Rey Dom Affonso o Quarto em seu tempo fez uma Ley, de que o theor tal he.

« 1 Aguisada razom he, que aquello, que he estabelecido em prol e favor do Povoo, non seja tornado em seu dapno . . . . . .

« E porque defendemos aos Judeos que non fizessem contrautos usureiros . . . . .

« E ora he-nos dito per homeês dignos de fé, que por razom da dita defesa os ditos Judeos fazem outros contrautos com os Chrisptaaõs, perque os ditos Chrisptaaõs recebem muito maior dapno dos seus averes, que aquellos, que recebiam antes da dita defesa.

« 2 . . . . . »

Ord. de D. Affonso 5.º — Liv. II. Tit. 97.

A prohibição absoluta da usura, ou mesmo a restricção da taxa do juro, tem produzido sempre graves damnos ao commercio, grandes abusos e peor condição do pobre.

Ferreira Borges, *verbo* usura, assim se exprime:

A taxa do juro é tão impossivel como a taxa dos alugueis; e por consequencia inuteis quantas leis repressivas a estabelecerem: o governo tomando emprestimos é quem fórça, e dá o primeiro exemplo á usura.

Dicc. Jur.

Sendo não só prejudicial mas impossivel a suppressão da usura, os canonistas urdírão um *distinguo*, de que resultou que, se considerada de certo modo, condemnavão a usura, considerada de outro modo, autorizavão-na.

E' peccaminoso, dizião, receber juros só com o fim de ganhar. A estes chamavão *usuræ lucrativæ*.

Mas quando o que exige o mutuante do mutuario não encerra senão uma simples indemnização, é-lhe licito recebel-a. A isto chamárão juros compensatorios (1).

Esta indemnização, disserão, tem lugar quando pelo facto do emprestimo ha para o mutuante algum lucro cessante ou damno emergente: *lucrum cessans aut damnum emergens* (2).

S. Thomaz d'Aquino já tinha estabelecido esta doutrina, concluindo que *o que aceita o mutuo* COM SUA UTILIDADE *compensa o damno de outrem* (3).

Mas todos os emprestimos estão neste caso, não fallando ainda no

---

(1) POTHIER. — *De l'Usure* — n. 117.

(2) Esta doutrina tambem foi apresentada por *Paulo de Castro*, jurisconsulto italiano do 15.º seculo, de quem o celebre *Cujacio* fazia tanto caso, que delle dizia: *Qui non habet Paulum de Castro, tunicam vendat et emat.*

(3) « Ille qui mutuum dat potest absque peccato in pactum deducere cum eo qui mutuum accipit, compensationem damni, per quod subtrahitur sibi aliquid quod debet habere; hoc enim non est vendere usum pecuniæ sed damnum vitare: et potest esse quod accipiens mutuum majus damnum evitet quam dans incurrat: unde accipiens mutuum cum sua utilitate damnum alterius compensat. »

S. TH. D'AQ. — *Obra citada.* — *Quæst. X.*

risco: basta o que diz o proprio *Pothier*, citando *Ulpiano*, *Minus solvit qui tardius solvit* (1).

De sorte que o resultado de tantas controversias, de tantas declamações, de tantos anathemas, de que tanto resultárão leis vexatorias, violencias, damno do commercio, abusos, perturbação das consciencias, é em definitiva: *que se não devem receber juros como* LUCRO DO EMPRESTIMO; *mas* COMO COMPENSAÇÃO DE LUCRO CESSANTE *ou* DAMNO EMERGENTE: o que tem sempre lugar pela simples privação do dinheiro.

Em tempos muito remotos, no Egypto, em Athenas, entre os Romanos, o juro era permittido, e havia mesmo legislação que o regulava. Nos primeiros seculos da Igreja era tolerado pelos governos, e os povos não ousarião reclamar contra as censuras ecclesiasticas, opprimidos como estavão pelo regimen feudal, sem commercio, sem industria, sem direitos.

A' medida que os povos se ião libertando desse estado de servidão, desenvolvia-se o commercio reclamando a mutuação de capitaes, e forão apparecendo as controversias, principalmente no seculo XVI, por occasião da reforma que admittiu a legitimidade da usura. Recrudesceu a intolerancia da igreja com o rigorismo com que soe oppor-se a toda a dissidencia e progresso (o que lhe tem alienado tantos milhões de fieis), e canonistas houve, que indo além dos antigos padres que admittião a *usura compensatoria*, anathematizárão como latrocinio a usura mesmo moderada, tanto no emprestimo ao rico como ao pobre, a negociantes como a outras pessoas (2). Negava-se a absolvição sem a restituição do que se houvesse recebido de juros. Tolhia-se o commercio e os abusos multiplicavão-se, por causa de leis repressivas civis que obedecião ao influxo canonico (3). Alfim no seculo passado a economia politica tirou a

---

(1) *Time is money.* — Tempo é dinheiro.

Anexim inglez.

« *Minus solvit qui tardius solvit.* Ce retard concédé au débiteur qui va jouir de la chose prêtée, tandis que le prêteur en sera privé, constitue pour le premier un avantage et pour le second une perte, dont l'intérêt, l'*usura* est le prix. »

TROPLONG — *Du prêt* — *n. 309.*

(2) *Vide* — Conférences ecclésiastiques ordonnées par le Mandement de Monseigneur l'Archevèque de Paris, 1679, L. III, Conf. 2ª, § 2º *in fine.*

(3) « Cum vero usuras multum leges nostræ abhorreant, non poterant easdem exercentibus graves pœnas non indicere. Itaque usurarius et usuras, quas recepit, restituit, et sortem principalem duplo amittit, et præterea in Africam biennio relegatur, Ord. lib. 4, tit. 67 *in princ.* »

MELLO FREIRE, *obra citada, lib. I, tit. 8º, § 21.*

questão do terreno religioso para o civil (1), e tem prevalecido o interesse publico, autorizando as leis uma taxa legal, e mesmo já em algumas nações o juro convencional; determinando-se uma taxa sómente para os casos em que não haja juro estipulado (2).

Não se deve porém concluir que seja licito ou que as leis justifiquem o exigir uma taxa de juro exorbitante dos limites do justo. *As leis*, diz o celebre *Grocio*, *podem dar occasião á impunidade*, *mas não podem dar o direito* (3).

Nada ha mais abominavel do que as espoliações que se fazem em emprestimos a juros exageradissimos; nem tambem nada mais lamentavel do que a estulticia do mutuario que em lugar de vender uma joia pelo seu justo valor, a empenha pela decima parte, sendo as outras nove decimas partes totalmente absorvidas em pouco tempo pelos juros (4).

---

(1) Já desde o seculo XVII as *Ordenações do Reino de Portugal* declarárão pertencer exclusivamente ao fôro civil a questão da usura.

« . . . . monendum, usurarum quæstionem, sive in jure, sive in facto versetur, ad judices Regios spectare Ord. Lib. IV, tit. 67, § 10.»

MELLO FREIRE, *loco citato*.

Em 1767 *Turgot* apresentou ao Conselho d'estado francez a sua *Memoria sobre os emprestimos de dinheiro*, em que elle reclamava a liberdade das transacções.

(2) Em Portugal já desde o seculo XVII (Alvará de 13 de Maio de 1698, *apud Correia Telles* n. 1138), foi autorizado o juro mas limitado a 5 %. Em França, a Assembléa nacional em 1789 autorizou o emprestimo a juros á taxa da lei. Hoje nestas duas nações a taxa da lei é de 5 %, para o civil, e de 6 % para o commercio, não havendo taxa estipulada (que é livre). No Brazil, a taxa é de 6 % (Lei de 24 de Outubro de 1832), se não houver outra taxa estipulada.

Nos paizes protestantes já muito anteriormente o juro tinha sido permittido, como por exemplo na Inglaterra, que o foi desde 1554 por um estatuto da rainha Isabel á taxa de 10 %; hoje restringida a 5 % (por estatuto da rainha Anna, no principio do seculo passado, sob pena de pagar o contraventor o triplo da quantia emprestada).

(3) « Leges vero humanæ quæ concedunt aliquid stipulari pro usu pecuniæ, aut rei alterius, ut apud Hollandos jam pridem concessum est aliis quidem octo nummos in centum, mercatoribus autem duodecim pro usu annali exigere, siquidem vere stant intra compensationem ejus, quod abest, aut abesse potest, non pugnant cum naturali, aut divino jure. sin eum modum excedunt, impunitatem præstare possunt, jus dare non possunt. »

H. GROTIUS. *De Jure belli ac pacis. L. II, Cap. 12, n. 22—1624.*

(4) A proposito do *v. 13, C. XXIX dos Proverbios*, escreve *Santo Ambrosio* com referencia *ao usurario e ao devedor*:

« . . . ille quasi accipiter unguibus olorem quærit invadere, iste quasi anser aut fulica, mavult se vel in prærupta dejicere, vel in profunda demergere, quam istum humani corporis accipitrem sustinere. . . . .

« Ambos ergo videt Dominus, fœneratorem, et debitorem: occurrentes sibi spectat ambos testis alterius iniquitatis, alterius injuriæ: illius avaritiam condemnat, hujus stultitiam. »

De Tobia. Cap. VII.

Seria do mesmo modo abominavel o procedimento daquelle que vendesse generos pelo decuplo do seu valor a um pobre que não tendo outrem que lhe fiasse em occasião de necessidade, os aceitasse, e visse depois todo o fructo do seu trabalho espoliado para se desempenhar.

Não menos abominavel é o procedimento do medico que a pretexto do beneficio do curativo de um doente o espolia; porque não é a utilidade da cousa, mas a somma de trabalho necessario para a produzir, que faz o seu preço; se não fosse assim, o serviço que nos presta uma habitação segura, principalmente em noite de tempestade, elevaria os alugueis a um preço fabuloso.

Mas poderão as leis taxar os preços dos generos, os alugueis, os serviços medicos?

Sem duvida que as usuras desde o ponto em que excederem a compensação do risco e da cooperação do capital na producção, devem ser comparadas ao roubo: mas como prefixar a taxa do juro, que por força das cousas é tão variavel?

As leis não podem resguardar o pobre da rapina de mutuantes sem consciencia, senão com o antidoto das caixas economicas, montes de soccorro e instituições semelhantes.

II—ANATOCISMO

Esta palavra é de origem grega. Cicero a empregou em latim, e tem passado para a maior parte das linguas: vem da preposição ἀνά que nas palavras compostas significa *repetição* ou *duplicação;* e de τόκος, *usura (Encyclopedia).*

O anatocismo é o que se chama vulgarmente *juro composto.*

Se a *usura* foi considerada injusta, e prohibida ou restringida pelas leis, o *anatocismo* foi considerado *crime gravissimo.*

O *Digesto* (seculo VI) prohibiu peremptoriamente o anatocismo, dizendo que *não tendo sido com bastante cautela prohibido pelas antigas leis, muito expressamente determinava de nenhum modo ser licito a alguem accumular juros ao principal, quer de tempo passado, quer de tempo futuro, e delles estipular novos juros* (1).

(1) « Ut nullo modo *usuræ usurarum* à debitoribus exigantur et veteribus quidem legibus constitutum fuerat, sed non perfectissime cautum.....

Quapropter hac apertissima lege definimus, nullo modo licere cuiquam usuras præteriti temporis, vel futuri in sortem redigere et earum iterum usuras stipulari. »

Corp. Jur. Civ. Lib. IV Tit 32, De Usuris.

A *Encyclopedia* (1751) diz que *o anatocismo é a mais criminosa especie de usura; que é contraria ao direito natural e divino; que nenhuma autoridade póde conceder a absolvição, mesmo em artigo de morte, sem restituição, ou ao menos promessa de restituição, podendo ser, de tudo o que se tenha adquirido por este crime.* (1)

Tão formidavel condemnação contrasta com o que anteriormente, em 1713, tinha dito o jurisconsulto portuguez *Antonio de Paiva e Pona*, que *quando o tutor gastar em seus usos o dinheiro dos orphãos deve pagar* USURAS DE USURAS (Orphanol. prat. Cap. XIII ns. 29 e 30).

O Alvará de 22 de Junho de 1768 mandou que a Mesa da Misericordia de Lisboa fizesse emprestimos *com amortização a longo prazo* (2).

Eisaqui estabelecido por lei em Portugal desde o meiado do seculo passado, *o anatocismo* na sua melhor applicação—A AMORTIZAÇÃO. Eisaqui o credito real e fundiario, que dois annos depois, em 1770, a Silesia vio estabelecer em beneficio da sua lavoura e finanças, mas ainda só mais tarde ali aperfeiçoado pela amortização.

Hoje ninguem considera o anatocismo como operação illicita.

Diz *Ferreira Borges :*

« Por certo não posso descobrir a razão da prohibição do anatocismo. Em commercio este contrato é de uso diario, principalmente na reforma de letras; e esta novação legitíma o contrato ».

Dicc. Jur. Comm.—Verbo—*Anatocismo*

---

(1) « C'est la plus criminelle espèce d'usure ; elle est sévèrement condamnée par les lois romaines, e par le droit commun de la plûpart des nations; elle est contraire au droit naturel et divin ; nulle autorité n'en peut accorder ni la dispense ni l'absolution, même à l'article de la mort, sans restitution, ou du moins la promesse de restituer, si on le peut, tout le bien acquis par ce crime, également opposé à la justice et à la charité. »

Encyclopedia—verbo-anatocisme.

(2) Mando que a Mesa da Misericordia não possa daqui em diante dar dinheiro a juro, senão com a segurança de boas consignações desembaraçadas; assi n pelo que toca á satisfação annual dos interesses; como pelo que pertence á extincção dos capitaes ; computando-se tudo em tal forma, que no preciso termo *de doze annos* continuos, successivos, e contados do dia da data da Escriptura da obrigação, *fiquem os respectivos capitaes e juros inteiramente pagos e satisfeitos.*

Alv. de 22 Jun. 1768.

Já os jurisconsultos (1) e theologos (2) da reforma, em harmonia com as suas doutrinas sobre a usura, discorrião que devendo o juro ser pago cada anno, e sendo licito ao credor emprestal-o a terceiro, isto é, capitalizal-o nas mãos de um terceiro, tambem deve ser-lhe licito capitalizal-o nas mãos do devedor, se este, em lugar de o pagar annualmente, o conserva em seu poder.

Mas é certo que o anatocismo não póde ser praticado senão dentro de estreitos limites: serião mesmo ociosas estipulações previas de grande amplitude, porque em pouco tempo o anatocismo absorveria mais do que poderião comportar as maiores fortunas (veja-se adiante a NOTA c).

E' sem duvida pela consideração da necessidade de restricções nesta questão, que *Almeida e Souza*, de Lobão (Notas a Mello, Liv. I) diz, *que é facil sustentar o licito e justo do anatocismo, isto é, quando os juros decursos se reduzem* POR NOVA ESTIPULAÇÃO *a capital para vencerem juros a favor do mesmo credor*. Não o admitte por estipulação previa, mas somente por novação de contrato.

Assim tambem a legislação moderna permitte o anatocismo com certas restricções, taes como novação de contrato, limitação de periodos decapitalização em c/c., etc. *Lei de 24 de Outubro de 1832—Cod. Com. Braz, art. 253— Cod. Civ. Port., n. 1642— Cod. Com. Port. n. 288.* Mas estas restricções deveráõ considerar-se como para vigorarem na falta de convenção entre as partes, ou nos casos em que o uso é uma convenção tacita, como acontece com os bancos, que capitalizão aos trimestres os juros em c/c. O *Cod. Com. Port.* admitte explicitamente a capitalização, tratando-se de juros vencidos por um anno (3).

---

(1) « Cæterum, usuræ debentur in infinitum, imo et usuræ usurarum, quia usuræ cujusque anni naturam sortis habent; si enim debitor solvisset, lucrum exinde creditor percipere potuisset: cum ergo creditor damnum hoc patiatur ex mora debitoris, hic injúria agit, jus alterius sua culpa minuit; indeque ex regula justitiæ generali jus suum cuique tribuere, id est, usuras usurarum præstare tenetur. »

SAMUELIS DE COCCEII. *Dissert. XII § 172* (Lausana 1751)

(2) « Compound interest though forbidden by the law of England, is agreeable enongh to natural equity; for interest detained after it is due, becomes, for all intents and purposes, part of the sum lent. »

DR. PALEY—*Obra citada.*

(3) N. 286—« Os juros vencidos de capitaes podem produzir juros ou por um litigio ou por uma convenção particular, tratando-se de juros vencidos por um anno. Em reformas de obrigações mercantis é licito capitalizar no novo titulo os juros vencidos para vencimento de novos juros, fosse qual fosse o prazo da duração do titulo precedente ».

Cod. Com. Port.

E' ferrenha a exigibilidade indefinida da divida integral: e tanto mais, quanto mais forte é o juro que se paga. As leis de *Moyses* (*Levitico XXV*, 10) estabelecião no fim de cada periodo de cincoenta annos o *jubileu em que todo o homem tornava a entrar de posse do que antes era seu.*

Essa ferrenha integridade da divida desapparece, praticando-se o anatocismo de modo que uma parte da annuidade seja applicada ao pagamento da divida.

A pratica portanto do *anatocismo* verdadeiramente util e fecunda em beneficios tem lugar nos emprestimos com amortização, como se verá na Secção III deste *Tratado.*

ALPHABETO GREGO (*)

LETRAS GREGAS		NOME	VALOR
Α	α	Alpha	a
Β	β	Béta	b
Γ	γ	Gamma	g
Δ	δ	Delta	d
Ε	ε	Epsilon	e *breve*
Ζ	ζ	Zéta	z, ds
Η	η	Éta	e *longo*
Θ	θ	Théta	th (**)
Ι	ι	Ióta	i
Κ	κ	Kappa	k, c
Λ	λ	Lambda	l
Μ	μ	My (***)	m
Ν	ν	Ny (***)	n
Ξ	ξ	Xi	x
Ο	ο	Omicron	o *breve*
Π	π	Pi	p
Ρ	ρ	Rho	r
Σ	σ	Sigma	s
Τ	τ	Tau	t
Υ	υ	Ypsilon	y (***)
Φ	φ	Phi	ph, f
Χ	χ	Chi	ch
Ψ	ψ	Psi	ps
Ω	ω	Omega	o *longo*

(*) Convindo fazer uso das letras gregas em algumas demonstrações e formulas, vem a proposito recordar aqui o *alphabeto grego*.

(**) Tem o som do *th* inglez.

(***) Y tem o som do *u* francez.

TRATADO

THEORICO E PRATICO

SOBRE OS

JUROS COMPOSTOS, RENDAS E ANNUIDADES,

E AMORTIZAÇÃO

SECÇÃO PRIMEIRA

DO CAPITAL E DO JURO

Sendo o capital o producto economizado de trabalho já feito, e concorrendo com o trabalho para as diversas producções industriaes e agricolas, e operações mercantís, elle deve vencer juro quando emprestado, assim como o trabalho vence o salario.

Mas se o capital é coefficiente com o trabalho na producção, a sua efficacia comtudo vai decrescendo a cada parcella delle accrescida ao duplo efficiente « trabalho-capital ».

A taxa do juro deve ser a relação da efficacia da parcella que vai ser accrescida, á efficacia desse duplo efficiente já existente. Sob este ponto de vista, o juro nem é accidental, nem arbitrario, nem injusto. A exageração do juro imposto pelo monopolio do capital é que é injusta, porque tende a privar o salario da sua parte economizavel na producção: o salario deixa de ser relativo á producção, e torna-se arbitrario e insufficiente [1].

---

[1] Esta doutrina está de accordo com a ideia de propriedade geralmente admittida. Deixo aos socialistas e positivistas o investigar se *todo* o capital deve ser considerado — capital humano —, formado pelo conjuncto dos esforços de toda a humanidade, ou, se até certo ponto (e como determinal-o), um particular *capitalista* é dono do *seu capital*. Em todo o caso, as regras fundamentaes deste Tratado terão sempre applicação; porque são propria natureza, e não estão sujeitas a arbitrio ou a convenções.

A taxa do juro varía muito em differentes épocas e lugares, seja por causa desse decrescimento da efficacia dos capitaes accrescidos, seja por multiplicadas influencias, como circumstancias locaes que tornem o emprego do capital muito lucrativo em umas regiões, e muito pouco em outras; impsotos, instituições politicas e civís; maior ou menor confiança ou segurança de reembolso, etc. Influencias, cuja investigação não está no plano deste *Tratado*.

O juro é ordinariamente estipulado a tantos por cento ao anno, e pago annual, semestral, trimensalmente, etc. Ora, se o capitalista mutuante estipula a cobrança dos juros annualmente, elle póde fazer com estes juros novos emprestimos, isto é, capitalizal-os, e com os novos juros ainda novos emprestimos, vindo assim a obter juros dos juros pelas successivas capitalizações. Suppondo estipulado que os juros se capitalizem em poder do proprio mutuario, o qual deva reembolsar o capital e os juros, tanto do capital como dos proprios juros, no fim de certo tempo determinado, a quantia a reembolsar chama-se *o capital com os seus juros compostos*. A esta operação tem-se dado o nome de *Anatocismo*. Portanto, a expressão — *capital com os seus juros compostos* — significa o capital primitivo sommado com a capitalização successiva dos juros á medida que se vão vencendo no fim de cada periodo.

§ I. — VALOR ADQUIRIDO PELO CAPITAL COM O SEU JURO

Supponhamos que o capital de 1:000$000 réis deve ser pago no fim de 4 annos com os juros de 6 por cento compostos ao anno. Para obtermos o valor resultante, multiplicaremos no fim de cada anno a quantia que se achar capitalizada, por 1.06, isto é, um mais o seu juro de um anno $\left(1+\frac{6}{100}\right)$, o que irá mostrando os incrementos que annualmente o capital vai adquirindo até terminar o prazo; deste modo:

No fim do 1º anno,

$$1:000\$000 \times 1.06 = 1.060\$000.$$

No fim do 2º anno,

$$1:060\$000 \times 1.06 = 1:123\$600.$$

No fim do 3º anno,

$$1:123\$600 \times 1.06 = 1:191\$016.$$

No fim do 4º anno,

$$1:191\$016 \times 1.06 = 1:262\$477.$$

Esta ultima quantidade igual a 1:000$000×1.06×1.06×1.06×1.06, ou 1:000$000×(1.06)^4, sendo o resultado de tantas multiplicações por 1.06 quantos são os annos, mostra-nos *que se obtem o valor de um capital com os seus juros compostos*, multiplicando o capital por uma quantidade formada de: — *1 — mais o seu juro de um anno, tendo por expoente o numero de annos.*

Notemos por

M, o capital mutuado;

t, a centesima parte da taxa de juro (1);

n, o numero de annos;

V, o valor a que monta o capital com os seus juros em n annos; e teremos esta equação:

$$M(1+t)^n = V \qquad (a)$$

O juro póde ser capitalizado mais de uma vez no anno; o que adiante se mostrará.

Fazendo, por abreviar, $1+t = r$, e dividindo a equação por M, achamos esta relação do capital e seus juros ao capital primitivo:

$$r^n = \frac{V}{M}. \qquad (b)$$

Fazendo $M = 1$, e n successivamente igual a 1, 2, 3,. . . . etc., construem-se Taboas que dão os valores de r^n para as taxas de juro mais usuaes: isto é, *elevando 1 com o seu juro de um anno á potencia indicada pelo numero de annos.* Basta então multiplicar o capital primitivo pela quantidade que se achar na columna do juro dado, e na linha horizontal do numero de annos correspondente a n, para ter o capital com o seu juro. Tal é a Taboa I (2).

Exemplo.—*A quanto montão 6:000$000 com os juros de 6 por cento annuaes compostos em 20 annos?*

Faremos na equação (a)

$$M = 6000000$$
$$t = 0.06$$
$$n = 20$$

(1) E' preciso determinar bem o sentido em que t deve ser tomado. Em todas as equações seguintes, t exprime a centesima parte da taxa de juro. Assim, se se trata do juro de 6 %, $t = 0.06$.

(2) Das Taboas collocadas no fim, a primeira é a mais extensa (56 taxas differentes); porque com ella se fazem facilmente todos os calculos de juros compostos e annuidades ás taxas que nella se contém, como se verá no decurso deste Tratado. E' a chave de todas as outras Taboas.

e acharemos:

$$6{:}000\$000 \times (1.06)^{20} = \text{Rs. } 19{:}242\$813.$$

Ora na Tab. I, na columna — 6 % — e no alinhamento de 20, está a quantidade $3.20713547 = (1.06)^{20}$, pela qual multiplicando os 6,000:000, obtem-se o mesmo resultado.

Tambem se póde fazer o calculo com os logarithmos da Taboa VII. Esta Taboa dá os logarithmos de r para differentes taxas com 10 decimaes.

Multiplicando o logarithmo da Taboa pelo numero de annos, tem-se o logarithmo de r^n. Para o exemplo acima procede-se assim:

$$\begin{aligned}
\text{log. da Taboa} &= 0{,}0253058653 \\
\text{Numero de annos} &= \underline{\qquad\qquad 20} \\
\text{log. } (1.06)^{20} &= 0{,}5061173060 \\
\text{log. } 6000000 &= \underline{6.7781513} \\
\text{log} &= 7.2842686
\end{aligned}$$

que corresponde a Rs. 19:242$813.

Para facilitar a multiplicação pelo expoente, principalmente quando este é uma fracção ou numero fraccionario (*vide* § 6° desta Secção e § 4° da Secção III), achão-se na Taboa VIII os logarithmos dos logarithmos de r, os quaes notaremos por: log. (log. r).

Para obter o logarithmo de $(1.06)^{20}$ do exemplo acima, toma-se na Taboa VIII:

$$\begin{aligned}
\text{log. (log. } 1.06) &= \bar{2}.4032212 \\
\text{log. } 20 &= \underline{1.3010300} \\
\text{log.} &= \bar{1}.7042512 \\
\text{Numero} &= 0.5061173
\end{aligned}$$

Este numero

$$0.5061173 = \text{log. } (1.06)^{20}$$

que é o mesmo acima achado.

Veja-se uma applicação conveniente no exemplo do § 11° da Secç. III.

Nota— A Taboa I dá os valores que o capital — 1 — adquire com o seu juro por um numero de annos que não exceda de 100. Se se der o caso de um periodo mais longo, pode-se obter o respectivo valor por meio desta mesma Taboa. Pois que

$$r^{x+y+z} = r^x \times r^y \times r^z,$$

segue-se que multiplicando as quantidades que se acharem na Taboa

ao juro dado, nos alinhamentos de annos cuja somma seja o prazo desejado, obtem-se o valor do capital com seu juro neste prazo.

EXEMPLO— *Para determinar a somma que o capital — 1 — deve attingir em 76 ½ annos com o juro de 6 por cento annual pago aos semestres*, deveráõ calcular-se os juros de 3 % compostos em 153 semestres. Tomando na Tab. I as quantidades nos alinhamentos de 70 e 83, e na columna — 3 por cento —, e multiplicando uma por outra (pois que 70+83 = 153), obtem-se

$$11{,}62758842 \times 7.91782191 = 92.06517435;$$

que é o valor do capital 1 com os seus juros de 3 % compostos em 153 periodos, salvo a ultima decimal que deve ser 4; porque como as quantidades da Taboa não vão alem da 8ª decimal, a qual pode ser defficiente ou reforçada, isto deve relativamente influir na oitava decimal destes productos, o que se deve ter em vista.

Para abreviar esta multiplicação (realmente laboriosa), visto que tem de desprezar-se as decimaes alem da oitava, inverta-se a ordem dos algarismos do multiplicador, tomando no multiplicando, a cada multiplicação parcial, sómente os algarismos que devem influir no producto total. Deste modo:

Multiplicando.....	11.62758842
Multiplicador invertido.....	191287197
	8139311894
	1046482958
	11627588
	8139312
	930207
	23255
	1163
	1046
	12
Producto com 8 decimaes =	92.06517435

O 1.º Supplemento á Tab. I fornece o valor do capital — 1 — com os seus juros a algumas das taxas mais usuaes, em prazos de 101 a 200 annos a fim de facilitar os calculos de pagamento de juros por trimestres em largos prazos. Nelle se achará a quantidade do presente exemplo.

O emprego dos logarithmos, com as Taboas VII e VIII, proporcionará um modo muito commodo de obter o juro composto em largos prazos, multiplicando o logarithmo da Taboa pelo numero de periodos de capitalização, como acima se explicou.

Deve-se fazer aqui especial menção do *arithmometro de Thomaz de Colmar*, machina preciosissima nas mãos do calculista, pois que com algumas voltas de manivella e sem risco de erro se executão fatigantes contas de multiplicar e de repartir.

§ II.—CAPITAL DESCONTADO

A equação $M r^n = V$, do § precedente, fornece os meios de resolver diversas questões. Examinemos primeiramente o valor actual de um capital (capital descontado).

Sendo exigivel uma quantia V no fim de n annos, que importancia M se deve receber actualmente, fazendo-se o desconto á taxa t de juro composto?

Deduz-se da equação acima:

$$M = \frac{V}{r^n}. \qquad (a)$$

Attribuindo a V e a r^n os mesmos valores do exemplo á fórmula (a) do § precedente, e tomando o valor de $(1{,}06)^{20}$ na Tab. I, tem-se:

$$M = \frac{19242813}{3.20713547} = 6000000.$$

A quantia de 19:242$813 descontada por 20 annos á 6 por cento composto, vale actualmente Rs. 6:000$000.

Portanto, para ter o importe da quantia descontada, *divide-se a mesma quantia por uma quantidade formada de: a somma de 1 mais o seu juro de um anno elevada á potencia indicada pelo numero de annos de desconto.*

Dividindo a equação (a) por V, obtem-se a seguinte relação do capital actual a este mesmo capital com seus juros:

$$r^{-n} = \frac{M}{V} \qquad (b)$$

Construem-se Taboas que dão os valores de r^{-n}: e então basta multiplicar a quantia a descontar pela quantidade que se achar na columna do juro proposto e no alinhamento de n, para ter a importancia descontada.

Tal é a Taboa II: para o exemplo precedente, achar-se-ha nesta Taboa no alinhamento de 20, columna — 6 % —, a quantidade 0.31180473.

Portanto,

$$19:242\$813 \times 0.31180473 = 6:000\$000$$

Com igual facilidade se achará a quantia descontada, fazendo uso dos logarithmos da Tab. VII, tomando o *complemento arithmetico* do log r^n, e delle subtrahindo 10 (*vide* a NOTA no fim deste §), o que dará o logarithmo de $\frac{1}{r^n}$; já sabemos pelos dois exemplos do § precedente como obter o log r^n; portanto, para achar a dita quantia descontada, procederemos:

$$\begin{aligned} \log (1.06)^{-20} &= \bar{1}.4938827 \\ \log 19242813 &= 7.2842686 \\ \hline \log &= 6.7781513 \end{aligned}$$

Valor actual Rs. 6:000$000, a que corresponde o logarithmo obtido.

NOTA.— O complemento arithmetico de um numero é a sua differença á unidade decimal de ordem immediatamente superior, isto é, a 10, 100, 1000, etc.; e é muito facil de obter, tomando o complemento a 10 do primeiro algarismo á direita, e o complemento a 9 de todos os outros.

Quando ha diversos numeros a subtrahir de diversos outros, podem-se tomar os seus complementos arithmeticos, addicional-os aos numeros a diminuir, e tirar á somma tantas vezes 10^n (segundo a ordem de cada complemento), quantos complementos se tiverem empregado.

E' evidente que,

$$P - Q = P + (10^n - Q) - 10^n.$$

$10^n - Q$ é o complemento arithmetico de Q: se pois se ajunta a P, e depois se tira 10^n, vale o mesmo que fazer directamente a subtracção.

Por exemplo, se de 525,75 mais 283 tivermos a tirar 62,5 mais 9,13, obtemos muito facilmente,

	525,75
	283
	37,5
	0,87
	847,12
Menos as unidades decimaes 100 e 10,	110,
E' o resto.....	737,12

Este methodo é muito commodo no calculo por logarithmos.

Para ter o logarithmo da fracção cujo numerador é — 1 —, bastará fazer o complemento do logarithmo do denominador, convindo muitas vezes para evitar enganos tirar immediatamente 10ª da caracteristica, que ficará sendo negativa, o que é indicado escrevendo por cima o signal — ; mas a *mantissa* (parte decimal do logarithmo) (1), conserva-se positiva; como se vê no ultimo exemplo do §.

§ III. — IMPORTE DO JURO. — IMPORTE DO DESCONTO.

O juro sendo a differença entre o capital e o valor do mesmo capital com o seu juro accumulado, se se representar por J o juro, teremos:

$$J = Mr^n - M = M(r^n - 1).$$

Se no exemplo do § 1º *quizermos saber quanto é o juro que vence o capital de 6:000$000 réis, composto em 20 annos;* tomando na Tab. I a quantidade da columna — 6 % — no alinhamento de — 20 —, da qual subtrahiremos — 1 —, achar-se-ha:

$$6000000 \times 2.20713547 = 13242813$$

E' o juro, Rs. 13:242$813.

Semelhantemente, o desconto é a differença entre os dois valores da quantia descontada e não descontada: se representarmos por D o desconto, teremos:

$$D = V - \frac{V}{r^n} = V(1 - r^{-n}).$$

No caso do § antecedente, V (quantia não descontada) iguala 19:242$813; tomando na Tab. II a quantidade da columna — 6 % — no alinhamento de — 20 —, a qual subtrahiremos de — 1 — (2), tem-se:

$$19242813 \times 0:68819527 = 13242813.$$

E' o desconto, Rs. 13:242$813.

Veja-se a NOTA *(a)*.

---

(1) Do latim -- *Mantissa* — additamento; cogulo.

Esta expressão é usada pelos geometras allemães.

Mantissa — The decimal part of a logarithm, as distinguished from the integral part, or *characteristic*.

WEBSTER.

(2) Esta subtracção faz-se muito facilmente, tomando o complemento a 10 do primeiro algarismo começando da direita, e o complemento a 9 de todos os outros.

§ IV. — DETERMINAÇÃO DO PRAZO. — PRAZO NECESSARIO PARA OBTER, COM O JURO DADO, CERTO MULTIPLO DO CAPITAL.

Um capital M com os seus juros compostos annualmente á taxa t produziu ou deve produzir a quantia V; pergunta-se em quantos annos n?

Da equação (b) do § 1.º deduz-se a

Resposta:

$$n = \frac{\log V. - \log M.}{\log r} \quad . \qquad (a)$$

Isto é, *o logarithmo do capital e juros, menos o logarithmo do capital; dividida esta differença pelo logarithmo de 1 com o seu juro de um anno.*

Tomando os mesmos valores dos exemplos do § precedente,

$$V = 19.242\$813$$
$$M = 6.000\$000$$
$$r = 1{,}06,$$

teremos:

$$n = \frac{7.2842686 - 6.7781513}{0{,}025305865} = 20 \text{ annos.}$$

Acha-se o logarithmo de r na Tab. VII.

Como $\frac{V}{M} = r^n$, se esta quantidade que é o quociente do capital com seus juros pelo capital actual, se achar nas Taboas na columna do juro dado, tambem se achará no mesmo alinhamento á esquerda o numero de annos: o que neste caso se verifica, sendo $r^n = 3.20713547$. Procurando na columna — 6 % — (Tab. I), acha-se no alinhamento desta quantidade — 20 — annos.

Se o quociente $\frac{V}{M}$ estiver comprehendido entre duas quantidades tabulares consecutivas na mesma columna, é porque o numero de annos é fraccionario: neste caso pode-se avaliar aproximadamente a parte do anno pelo methodo que se hade expôr no § 7º da Secção II.

Pode ser necessario determinar em quantos annos um capital com um juro dado dobra, triplica, quadruplica etc. Na dita equação (b) do § 1º, V é o valor que adquire o capital M com os seus juros compostos;

basta portanto no caso presente fazer V igual a $2M$, $3M$,. . . . . kM (sendo k o multiplo do capital que se quer obter), para se achar a solução :

$$r^n = k\,;$$

portanto,

$$n = \frac{\log k}{\log r} \qquad (b)$$

Exemplo. — *Em quantos annos se achará sextuplicado um capital com o juro de 6 °/₀ composto annualmente?*

Aqui,

$$k = 6\,;\ r = 1.06.$$

Teremos :

$$n = \frac{\log 6}{\log 1.06} = \frac{0.7781513}{0.0253059} = 30,75$$

São pois precisos 30 annos e 9 mezes.

A Taboa X indica em quantos annos se obtem os multiplos, até o decuplo, de um capital a diversas taxas de juro (¹).

§ V. — TAXA DO JURO.

O capital M deve importar no fim de n annos com os seus juros compostos na quantia V; pergunta-se a que taxa t de juros?

Da equação (b) do § 1º deduz-se a

Resposta :

$$\log(1+t) = \frac{\log V - \log M}{n}\,. \qquad (a)$$

Isto é, *do logarithmo do capital com os seus juros subtrahindo o logarithmo do capital, e dividindo esta differença pelo numero de annos, obtem-se o logarithmo de 1 com o seu juro de um anno, do qual se infere a taxa.*

Com os mesmos valores precedentes, teremos :

$$\log(1+t) = \frac{7.2842686 - 6.7781513}{20} = 0.025305865.$$

(¹) Acha-se aproximadamente o tempo em que duplica e triplica um capital, dividindo 70, no primeiro caso, e 110, no segundo, pela taxa. Assim $\frac{70}{5}$ e $\frac{110}{5}$, darão aproximadamente o tempo, ao juro de 5 por cento.

Mas 0.025305865 = log 1.06. Logo, a taxa do juro é 6 por cento. Vê-se que em prazos largos, só com os logarithmos se pode achar na dita equação (*b*) do § 1º, a taxa:

$$t = \sqrt[n]{\frac{V}{M}} - 1 \qquad (b)$$

Como a Tab. I dá as potencias de 1 com o seu juro $\left(\frac{V}{M}\right)$, segue-se que, se na Taboa e no alinhamento de n se achar $\frac{V}{M}$, no alto da columna estará indicada a taxa do juro.

Neste caso $\frac{V}{M} = 3.20713547$; quantidade que se acha no alinhamento de — 20 — e na columna — 6 % — da Tab. I. E' esta portanto a taxa procurada.

Se o quociente $\frac{V}{M}$ se achar comprehendido entre as quantidades tabulares de duas columnas consecutivas, no mesmo alinhamento, pode-se achar a taxa approximada pelo methodo indicado no § 8º da secção II.

§ VI. — FRACÇÃO OU NUMERO FRACCIONARIO DE ANNOS DO PRAZO.— DO JURO A PAGAR ANNUALMENTE, QUE TAXA CORRESPONDE A UMA PARTE DO ANNO. — DO JURO A PAGAR EM PARTES DO ANNO, QUE JURO RESULTA AO ANNO.

O periodo da accumulação ou desconto de juros póde ser uma fracção de anno ou um numero fraccionario de annos. Suponhamos que nas formulas precedentes se acha $n = n' + \frac{l}{k}$; isto nos indica que é o numero n' de annos e mais uma parte $\left(\text{representada por } \frac{l}{k}\right)$ de anno.

Importa distinguir os dois casos seguintes :

1º O juro correspondente a uma parte do anno á taxa *t composto ao anno.*

2º O juro á taxa *t* ao anno, mas *compondo-se, ou pagando-se* $\frac{1}{m}$ *parte delle* m *vezes por anno.*

Primeiro caso.—No primeiro caso, não póde tomar-se uma parte do juro proporcional á parte do anno (que é a condição do segundo caso, e como se faz no commercio com os juros simples), porque devendo os juros ser capitalizados no fim de cada anno, claro está que só no fim do anno é que são devidos com o capital; e portanto, se no

vencimento de um prazo, no fim de tres mezes, por exemplo, do ultimo anno, se compozesse a quarta parte do juro de um anno (por esses tres mezes), pagaria-se demais, porque o juro não era devido senão no fim do anno, e houve antecipação de pagamento.

Para determinar a importancia do capital M com o juro correspondente á $\frac{l}{k}$ parte do anno, visto que o capital no fim do anno se converte em Mr, deveremos partir r em dois factores:

$$r^{\frac{l}{k}} \times r^{\frac{k-l}{k}} = r.$$

Assim a quantia a pagar no fim da $\frac{l}{k}$ parte do anno será

$$Mr^{\frac{l}{k}}, \qquad (a)$$

que é igual a Mr descontado pelo resto do anno; isto é:

$$Mr^{\frac{l}{k}} = \frac{Mr}{r^{\frac{k-l}{k}}}. \qquad (b)$$

Portanto a taxa do juro correspondente á $\frac{l}{k}$ parte do anno será:

$$r^{\frac{l}{k}} - 1. \qquad (c)$$

Esta theoria funda-se em que a taxa t do juro a capitalizar annualmente deve ser formada de capitalizações successivas de um certo juro t', tantas vezes quantas forem as partes k em que se fraccione o anno [1]; que os dous valores do capital no principio do anno, e do mesmo capital com seus juros, no fim, sejão M e Mr; e $1+t' = r'$; teremos que M se tornará successivamente:

$$Mr', \; Mr'^2, \; \ldots \; Mr'^k.$$

---

[1] Isto é o mesmo que inserir $(k-1)$ meios geometricos entre M, capital no principio do anno (primeiro termo), e Mr, capital no fim do anno (ultimo termo). Como nesta progressão geometrica o quociente iguala $\sqrt[n-1]{\frac{Mr}{M}} = r^{\frac{1}{n-1}}$, e n (numero de termos) iguala $(k+1)$, será a unidade mais o juro correspondente a cada fracção do anno: $r^{\frac{1}{k}}$.

Portanto,

$$Mr'^k = Mr.$$

Logo,

$$r' = \sqrt[k]{r}.$$

Resulta que, *um mais o juro annual de um que corresponda á* $\frac{1}{k}$ *do anno, e que deveria produzir* r *no anno inteiro* é:

$$r^{\frac{1}{k}}. \qquad (d)$$

Fazendo $k = 12$, teremos para o capital com seu juro em 1 mez:

$$Mr^{\frac{1}{12}};$$

e em 3 mezes:

$$Mr^{\frac{3}{12}=\frac{1}{4}};$$

e assim para qualquer outra fracção do anno.

O 2º Supplemento á Tab. I fornece os valores do capital — 1 — com seus juros aos mezes.

Exemplo. — *Seja o capital de 10:000$000 mutuado á taxa annual de 6 % de juro composto: qual é a importancia que este capital tem attingido no fim de 8 mezes?*

O 2º Supplemento á Tab. I dá immediatamente a importancia pedida; mas para exercicio, façamos:

$$M = 10{:}000\$000\,;\ r = 1.06\,;\ \frac{l}{k} = \frac{2}{3}.$$

Pela Tab. VIII, teremos:

$$\begin{aligned} \log(\log 1.06) &= \bar{2}.4032212 \\ \log 0.66666 &= \bar{1}.8239087 \\ \hline \log &= \bar{2}.2271299 \\ \hline \text{Numero} &= 0.0168706 \end{aligned}$$

Mas,

$$0.0168706 = \frac{2}{3}\log(1.06) = \log 1.0396103\,;$$

portanto,

$$10{:}000\$000 \times (1.06)^{\frac{2}{3}} = \text{Rs. } 10{:}396\$103.$$

E' esta a quantia que o mutuario teria de pagar, se por ulterior convenção tivesse de solver o seu debito no fim de 8 mezes.

Com a Taboa VII é mais facil este calculo, tomando os $\frac{2}{3}$ do logarithmo correspondente á taxa de 6 %; mas o exemplo acima serve para fracções de anno menos simples.

Para o juro capitalizavel ao anno é preciso determinar uma taxa uniforme equivalente, no caso de se pagar o juro por fracções em periodos menores.

Sendo k o numero de pagamentos n'um anno, e x a taxa uniforme que se procura, teremos segundo a formula (d) a seguinte equação:

$$\left\{ r^{\frac{0}{k}} + r^{\frac{1}{k}} + r^{\frac{2}{k}} \ldots + r^{\frac{k-1}{k}} \right\} x = r - 1 .$$

Exemplo. — *Sendo o juro de 6 por cento composto ao anno, que taxa lhe corresponde trimensalmente?*

Na equação acima, fazendo $r = 1.06$, e $k = 4$, teremos:

$$\left\{ 1 + (1.06)^{\frac{1}{4}} + (1.06)^{\frac{1}{2}} + (1.06)^{\frac{3}{4}} \right\} \times x = 0.06.$$

No 2º Supplemento á Tab. I, achão-se os valores do juro em cada uma destas fracções de anno.

Não é, porém, necessario tão longo calculo. Na penultima equação, sommando os termos do coefficiente de x (*vide* Secç. II, § 1º—nota), resulta:

$$x = (r-1) \times \frac{r^{\frac{1}{k}} - 1}{r-1} = r^{\frac{1}{k}} - 1 . \qquad (d)\ bis.$$

Valor igual ao da fórmula (c) (fazendo $l = 1$), como deve ser.

Tomando um quarto do log. (1.06) na Tab. VII (1ª parte), acha-se:

$$\log (1.06)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times 0.0253058653 = 0.0063264663$$

$$\text{Numero correspondente} = 1.014673846$$

No 2º Supplemento á Tab. I, (col.—3 mezes—), obtem-se immediatamente o mesmo resultado.

Portanto, $1\frac{46738}{100000}$ por cento cada trimestre vale o mesmo que 6 por cento no fim do anno.

Para o desconto de um valor V por uma fracção de anno, tem-se

segundo se deduz da formula (*a*) deste §, e conforme á equação (*a*) do § 2°:

$$\frac{V}{r^{\frac{l}{k}}}. \qquad (e)$$

O Supplemento á Tab. II fornece os valores do capital — 1 — descontado aos mezes.

Exemplo.— *Que o capital no fim do anno seja 10:600$000 por ajuste de juro de 6 °/₀ composto ao anno: quanto importa este capital descontado por 4 mezes?*

Multiplicando o capital pela quantidade do Suppl. á Tab. II na columna 6 °/₀ — e alinhamento de 4, tem-se o valor buscado; mas para exercicio, façamos:

$$V = 10{:}600\$000\,; \quad \frac{l}{k} = \frac{1}{3}\,; \quad r = 1.06.$$

$$\log 10600000 - \frac{1}{3}\log 1{,}06 = 7.0168706 = \log 10396103.$$

Portanto,

$$10{:}600\$000 \times (1.06)^{-\frac{1}{3}} = 10{:}396\$103.$$

Resultado igual ao que acima se achou; porque neste caso as condições são identicas: visto serem os mesmos capitaes no principio e no fim do anno, o mesmo juro, e coincidir o juro e o desconto na mesma epoca: 8 mezes.

Como aqui $V = Mr$, deve verificar-se a equação (*b*) deste §.

Segundo caso. — No segundo caso, pagando-se ou capitalizando-se $\frac{1}{m}$ de t cada $\frac{1}{m}$ do anno, o capital M se tornará successivamente até ao fim do anno:

$$M\left(1+\frac{t}{m}\right),\ M\left(1+\frac{t}{m}\right)^2,\ \ldots\ldots\ M\left(1+\frac{t}{m}\right)^m.$$

Portanto o capital com o seu juro á taxa t composto em fracções $\frac{1}{m}$ vale no fim do anno :

$$M\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m}; \qquad (f)$$

e no fim de n annos :

$$M\left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn}. \qquad (g)$$

E' evidente que quando se contrata pagar o juro aos semestres ou trimestres, a taxa real é maior que a nominal ; porque

$$\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m}-1>t.$$

Exemplo.—*Quanto importa no fim de 10 annos o capital de 10:000$000 com o juro de 6 por cento annual composto por metade aos semestres?*

Teremos :

$$M=10000000; \quad 1+\frac{t}{m}=1.03; \quad m=2; \quad n=10.$$

E portanto (formula (g)):

$$10:000\$000\times(1.03)^{20}=18:061\$112.$$

Observe-se que se póde fazer uso da Taboa I, tomando a $\frac{1}{m}$ da taxa, e m vezes o numero de annos.

No exemplo acima *toma-se a quantidade da columna — 3 % (metade da taxa) no alinhamento de 20 (dobro dos annos), a qual se multiplica pelo capital.*

A taxa annual, resultante do pagamento do juro em fracções é evidentemente (formula f) :

$$\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m}-1. \qquad (g) \text{ bis}$$

Exemplo.—*Sendo o juro de 6 por cento composto pela quarta parte aos trimestres, que taxa resulta ao anno?*

Faremos na formula acima $t = 0.06$ e $m = 4$; e tomando a quantidade da Tab. I, col. — 1 $^1/_2$ $^0/_0$ — no alinhamento de 4, teremos:

$$(1.015)^4 - 1 = 0.06136355.$$

Portanto, a taxa resultante é de 6 $\frac{136355}{1000000}$ por cento ao anno: e tanto faz pagar esta taxa por anno, como a de 1 $^1/_2$ por trimestre.

Para os descontos, deduz-se do que fica dito acima, e da equação (*a*) do § 2°, que o valor V descontado por um anno á taxa t, mas compondo-se $\frac{1}{m}$ da taxa m vezes por anno, é:

$$\frac{V}{\left(1+\frac{t}{m}\right)^m}; \qquad (h)$$

e sendo o desconto por n annos:

$$\frac{V}{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn}}. \qquad (i)$$

Assim, *o valor actual de 10:000$000 pagaveis no fim de 10 annos fazendo-se o desconto de 6 $^0/_0$ annual, mas composto aos semestres*, é:

$$10:000\$000 \times (.103)^{-20} = 5:536\$757.$$

Observe-se ainda, que a Tab. II fornece as quantidades para este calculo, tomando na taboa $\frac{1}{m}$ da taxa do juro, e m vezes o numero de annos.

No exemplo acima, *é a quantidade que se acha no alinhamento de 20 e na columna — 3 $^0/_0$ —, pela qual se deve multiplicar o capital.*

§ VII. — VENCIMENTO COMMUM PARA DIVERSAS QUANTIAS QUE SE VENCEM EM DIVERSAS EPOCAS.

O vencimento commum deve ser n'uma época tal, que o juro, desde o respectivo vencimento até essa época, das quantias cujos vencimentos são anteriores, iguale o desconto desde essa época até os vencimentos respectivos, das quantias cujos vencimentos são posteriores.

Consideremos o caso mais simples de duas quantias a e b a vencerem-se respectivamente nos prazos n e ν, sendo $\nu > n$; e a unidade com seu juro $= r$, e o prazo commum $= x$.

As condições acima verificão-se na seguinte equação:

$$ar^{x-n} - a = b - \frac{b}{r^{\nu-x}}.$$

Daqui se tira:

$$\left(\frac{a}{r^n} + \frac{b}{r^\nu}\right) r^x = a + b; \quad r^x = \frac{a+b}{\frac{a}{r^n} + \frac{b}{r^\nu}}.$$

Esta equação conduz-nos á formula (a) do § 4°; pois que se fizermos a somma ($a+b$) das quantias a vencer igual a V, e a somma dessas quantias descontadas cada uma pelo respectivo prazo $\left(\frac{a}{r^n} + \frac{b}{r^\nu}\right)$ igual a M, teremos:

$$x = \frac{\log V - \log M}{\log r}$$

Portanto, para determinar um prazo commum para diversas quantias a diversos prazos, *faz-se o logarithmo da sua somma, e tambem o logarithmo da somma das mesmas quantias descontadas, cada uma pelo respectivo prazo; subtrahe-se o segundo do primeiro, e divide-se a differença pelo logarithmo de 1 com o seu juro de um anno.*

Exemplo.—*Sejão as tres quantias de 8, 5 e 7 contos pagaveis no fim de 3, 5 e 12 annos, para as quaes se pretende um vencimento commum, contando-se juros de 6 por cento ao anno.*

Quantias devidas no fim dos prazos	Prazos	As mesmas quantias descontadas, ou seu valor actual
8:000$000	3	6:716$954
5:000$000	5	3:736$291
7:000$000	12	3:478$786
20:000$000		13:932$031

Teremos, segundo a formula precedente:

$$x = \frac{\log 20000000 - \log 13932031}{\log 1.06} = 6.2047.$$

Ou 6 annos e 75 dias.

Com effeito, os juros contados sobre 8 e 5 contos, desde os seus vencimentos particulares até ao vencimento commum, igualão o desconto de 7 contos pela antecipação desde o vencimento commum ao seu vencimento particular, como é preciso que se verifique.

Eis aqui o calculo:

$$8{:}000\$000 \times \left\{(1.06)^{3.2017} - 1\right\} = 1{:}642\$460$$

$$5{:}000\$000 \times \left\{(1.06)^{1.2017} - 1\right\} = 363\$600$$

$$\text{Juros} = 2{:}006\$060$$

$$7{:}000\$000 \times \left\{1 - (1.06)^{-5.7953}\right\},$$

vide a formula do § 3º, $= 2{:}006\$060$

$$\text{Desconto} = 2{:}006\$060$$

Pagando-se portanto 20:000$000 réis no fim de 6 annos e 75 dias, satisfaz-se o equivalente a 8, 5 e 7 contos respectivamente no fim de 3, 5 e 12 annos, contando-se juros a 6 % capitalizados ao anno.

Veja-se a NOTA (*b*).

SECÇÃO SEGUNDA

DAS ANNUIDADES, RENDAS OU PENSÕES

Uma quantia determinada que se tenha de pagar ou receber annualmente (quer seja de uma vez, ou por partes em fracções correspondentes do anno), chama-se uma *annuidade.*

Uma *renda* tambem é uma annuidade em favor do rendeiro; mas uma *renda* póde não ter um valor certo e constante, como por exemplo as de propriedades territoriaes. Para avaliar estas rendas toma-se a media do rendimento liquido de certo numero de annos, 5 annos, por exemplo, e assim entrão no dominio do calculo das annuidades.

Uma *pensão* é uma renda ou uma annuidade determinada a favor do pensionista em virtude de compra, seguro, legado, ou qualquer contrato.

Annuidade, pois, é um termo generico que póde significar a collocação periodica de uma quantia no principio, ou a renda, pensão ou amortização pagavel no fim, de cada periodo. Tratarei portanto promiscuamente das *annuidades e rendas;* porque: *rendas, pensões, annuidades,* logo que se determine valor e periodicidade, tudo se submette ao mesmo calculo.

As annuidades podem ser por um determinado numero de annos, isto é, *temporarias,* ou por um numero indefinido de annos, isto é, *em perpetuo.*

As annuidades e rendas vitalicias serão assumpto de um tratado especial, juntamente com os seguros sobre a vida.

As annuidades podem começar desde logo: *annuidades ou rendas immediatas;* ou em época mais ou menos remota: *rendas differidas.*

Trataremos em primeiro lugar das annuidades ou rendas immediatas.

§ I. — SOMMA DE ANNUIDADES COLLOCADAS NO PRINCIPIO DO ANNO.

Seja a uma annuidade collocada no principio de cada anno a juros compostos á taxa t; e que se requeira a quantia Q que devem produzir todas estas annuidades com os seus juros no fim de n annos.

Façamos $1+t=r$.

E' evidente que a ultima collocação terá vencido um anno de juros; a penultima, 2 annos; a antepenultima, 3 annos.....e assim retrogradando até a primeira que terá vencido n annos; portanto, empregando a formula da equação (a) do § 1º — Secç. I para estes valores parciaes, attribuindo em cada anno a n o numero respectivo, acharemos a seguinte progressão geometrica [1] :

$$Q = ar + ar^2 + ar^3 \ldots\ldots + ar^n.$$

Multiplicando o primeiro membro desta equação por $(1+t)$, e o segundo por r (quantidades iguaes), virá :

$$(1+t)\ Q = ar^2 + ar^3 + ar^4 \ldots\ldots + ar^{n+1}$$

Subtrahindo a primeira da segunda equação, a differenca é :

$$t \times Q = ar^{n+1} - ar;$$

de que resultará a final para a quantia Q que devem produzir n annuidades do valor a cada uma, collocadas no principio de cada anno á taxa t de juro composto :

$$Q = a \times \frac{r^{n+1} - r}{t}. \qquad (a)$$

Isto é, para ter a somma que produzem certo numero de annuidades collocadas no principio de cada anno, com os juros, *eleva-se — 1 com o seu juro de um anno — á potencia indicada pelo numero de annos e mais um (Taboa I), e subtrahe-se — 1 com o seu juro de um anno — ; multiplica-se esta differença pela annuidade de um anno ; por ultimo, divide-se o producto pelo juro annual de 1.*

---

[1] Obtem-se a somma dos termos de uma progressão geometrica, subtrahindo o termo menor do maior multiplicado pela razão ; e dividindo esta differença pela razão menos 1. Aqui a razão é r; e a razão menos 1, é t.

Dividindo esta equação por a, e fazendo $\frac{Q}{a} = s_n$, teremos a seguinte:

$$S_n = \frac{r^{n+1} - r}{t}, \qquad (b)$$

que dá a somma de n annuidades, *sendo cada uma igual* $a - 1$ — collocada no principio de cada anno.

Para ter a somma de 15 annuidades de 1 real collocadas no principio de cada anno, com o juro de 6 por cento, faremos $n = 15$, e $r = 1.06$.

Tomando na Tab. I o valor de $(1.06)^{16}$, obteremos:

$$S_{15} = \frac{2.54035168 - 1.06}{0.06} = 24.672528.$$

Construem-se Taboas que fornecem os valores de S_N, isto é, quantidades pelas quaes basta multiplicar a annuidade para ter a sua somma [1]. Veja-se a Taboa III calculada para algumas taxas sómente, afim de servir para os exemplos.

§ II. — SOMMA DAS RENDAS OU ANNUIDADES COBRAVEIS NO FIM DO ANNO.

Tratemos agora das annuidades ou rendas pagaveis no fim do anno, e requeira-se a somma K de n annuidades, do valor a cada uma.

E' evidente que neste caso cada annuidade vence 1 anno menos de juros, e que basta dividir as equações precedentes por r, para ter o valor de K.

---

[1] Das series acima se infere que,

$$r\left(1 + S_{n-1}\right) = S_n .$$

O que fornece um meio facil para a construcção de uma taboa: obtendo-se do valor de $(n-1)$ annuidades o de n annuidades.

Portanto,

$$K = a \times \frac{r^n - 1}{t}. \qquad (a)$$

O que mostra que a somma que produzem certo numero de annuidades, collocadas no fim de cada anno, com os juros, obtem-se deste modo: *Da somma de 1 mais o seu juro de um anno elevada á potencia indicada pelo numero de annos (Tab. I), subtrahe-se 1; depois multiplica-se esta differença pela annuidade de um anno; por fim, divide-se o producto pelo juro annual de 1.*

Dividindo como acima os dois membros desta equação por a, e fazendo $\frac{K}{a} = \Sigma_n$, resulta a somma de n annuidades da renda —1— pagavel no fim de cada anno:

$$\Sigma_n = \frac{r^n - 1}{t}. \qquad (b)$$

Construem-se Taboas que dão os valores das equações (*b*) do § 1 e (*b*) deste § [1], fazendo n successivamente igual a 1, 2, 3, etc. Como estes valores são relativos á annuidade — 1 —, basta multiplicar a annuidade de que se quer ter a somma, pela quantidade da Taboa no alinhamento de n e na columna de t (taxa do juro).

Taes são as Taboas III e IV.

Exemplo:—*Quanto é a somma da renda de 1:000$000 réis no fim de cada anno, em 15 annos a 6 por cento?*

Pela formula (*a*), $n = 15$, $r = 1.06$ e $a = 1:000\$000$. Tomando na Taboa I o valor de $(1.06)^{15}$, teremos:

$$1:000\$000 \times \frac{2.396558 19 - 1}{0.06} = 23:275\$970.$$

---

[1] Para a construcção de uma taboa da somma de annuidades exigiveis no fim do anno (Tab. IV), tem-se:

$$r\,\Sigma_{n-1} + 1 = \Sigma_n.$$

Do valor de $(n-1)$ annuidades, facilmente se deduz o de n annuidades.

Na Tab. IV acha-se no alinhamento de 15 e na columna — 6 °/₀ — a quantidade 23.27596988; a qual multiplicada pela annuidade, dará a mesma importancia acima.

Obtem-se os logarithmos das quantidades da Tab. IV por meio dos logarithmos das Taboas VI e VII.

A Tab. VI dá o valor da annuidade α capaz de amortizar em certo numero de annos o capital — 1 —. No § 2°, Secç. III se verá (formula (*d*)), que a sua expressão é,

$$\frac{tr^n}{r^n - 1};$$

se dividirmos r^n por esta expressão, resulta,

$$\frac{r^n}{\left(\frac{tr^n}{r^n - 1}\right)} = \frac{r^n - 1}{t}$$

que é o valor de Σ_n.

Portanto,

$$n.\log r - \log \alpha_n = \log \Sigma_n .$$

O logarithmo de r acha-se na Taboa VII, que se multiplica por n; e do producto subtrahe-se o log α_n, que se acha na Tab. VI.

No Exemplo acima, teremos:

15×log 1.06 (Tab. VII)	0.3795880
log α_{15} (Tab. VI, col. 6 °/₀)	$\bar{1}$.0126801
log Σ_{15}.....	1.3669079
log 1000000.....	6.0000000
log =	7.3669079
Numero =	23275970

Rs. 23:275$970.

E' desnecessario calcular duas taboas para os valores de S_N e Σ_N; basta calcular uma d'ellas; porque de uma se deduz facilmente a outra; porque:

$$S_n + 1 = \frac{r^{n+1} - r}{r - 1} + 1 = \frac{r^{n+1} - 1}{t} = \Sigma_{n+1};$$

e tambem:

$$\Sigma_{n+1} - 1 = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} - 1 = \frac{r^{n+1} - r}{t} = S_n.$$

Portanto, se se tem a taboa que dá o valor de Σ_N, tomando a quantidade do alinhamento de $(n+1)$ e diminuindo-a de uma unidade, ter-se-ha o valor de S_n.

EXEMPLO.—*Queremos a somma de 15 annuidades de 1:000$000 réis collocadas no principio de cada anno com o juro de 6 ½ %; mas temos uma taboa que dá os valores de* Σ_N (*Tab. IV, de annuidades no fim do anno*).

Procurando nesta taboa no alinhamento de 16, achamos 26.75401034 de que diminuindo 1, teremos a somma das 15 annuidades collocadas no principio de cada anno.

Rs. 25:754$010 (Tab. III).

§ III. — VALOR ACTUAL DAS ANNUIDADES.

O *Presente valor de* n *annuidades* a pagar é a somma das annuidades descontadas cada uma dellas pelo prazo respectivo (veja-se a equação (*a*) do § 2°, Secç. I); assim, o presente valor A de n annos da renda a descontada á taxa t, fazendo $1+t = r$, será:

$$A = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} \cdots\cdots\cdots + \frac{a}{r^n}.$$

Fazendo a somma da serie pelo methodo para a equação (a) do § 1° desta Secç., observando que aqui o maior termo é o primeiro, o qual se deve multiplicar por r, e do producto subtrahir o ultimo termo (que é o menor), dividindo a differença por $r-1=t$, obtem-se:

$$A = a \times \frac{1-r^{-n}}{t}. \qquad (a)$$

Dividindo cada membro por a, e fazendo $\frac{A}{a} = P_n$, resulta:

$$P_n = \frac{1-r^{-n}}{t}, \qquad (b)$$

que é a expressão do presente valor da renda — 1 —.

A quantidade para cada anno n, attribuindo a n os valores desde 1 até 100, acha-se na Taboa V (*vide* a NOTA no fim deste §). Basta portanto multiplicar a annuidade de que se quer ter o presente valor pela quantidade tabular no alinhamento de n e columna t.

EXEMPLO.—*Qual é o presente valor de 15 annuidades de renda de 1:000$000 réis com o desconto de 6 % ao anno?*

Aqui, $n=15$, $r=1.06$ e $a=1000000$. Substituindo estes valores na formula (a), e tomando na Tab. II o valor de $(1.06)^{-15}$, tem-se:

$$1:000\$000 \times \frac{1-0.41726506}{0.06} = \text{Rs. } 9:712\$249.$$

Na Tab. V acha-se na columna — 6 % — a quantidade 9.71224898, a qual, multiplicada pela annuidade 1:000$000, dá a mesma importancia.

E' visivel que na equação (b)

$$\frac{1-r^{-n}}{t} = \frac{r^n-1}{t \times r^n}.$$

Por consequencia, tomando o valor de r^n na Tab. I, achar-se-ha tambem o presente valor da annuidade, *subtrahindo 1 da quantidade*

tabular correspondente ao numero de annos, e dividindo a differença pela mesma quantidade tabular multiplicada pelo juro de 1 O quociente é o multiplicador da annuidade.

Para o exemplo acima, toma-se na Tab. I, $(1.06)^{15} = 2.39655819$, e acha-se :

$$1:000\$000 \times \frac{2.39655819-1}{0.06 \times 2.39655819} = \frac{1.39655819}{0.1437934914} = \text{Rs. } 9:712\$249 .$$

Facilmente se obtem os logarithmos das quantidades da Tab. V por meio dos logarithmos da Tab. VI.

No § 2°, Secç. III, formula (*c*), a expressão da annuidade x que amortiza o capital — 1 — é :

$$\frac{t}{1-r^{-n}};$$

dividindo — 1 — por esta expressão, tem-se :

$$\frac{1}{\left(\frac{t}{1-r^{-n}}\right)} = \frac{1-r^{-n}}{t} = P_n.$$

Portanto, os complementos dos logarithmos da Taboa VI (*vide* a NOTA ao § 2°, Secç. I), darão os logarithmos das quantidades da Taboa V:

$$\text{Compl. log } \alpha_n = \log P_n .$$

No exemplo acima teria-se:

Compl. log α_{15} (Tab. VI, col. 6 %).....	0.9873199
log 1000000.....	6.0000000
log =	6.9873199
Numero =	9712250

Rs. 9.712$250 .

Veja-se a NOTA (*c*).

Se a renda fôr perpetua, neste caso $n = \infty$, de sorte que r^{-n} torna-se nulio. O valor da renda, isto é, o capital C necessario para produzir

a renda perpetua — 1 — á taxa t de juro ao anno é por consequencia :

$$C = \frac{1}{t}.$$

NOTA SOBRE AS ANNUIDADES ADIANTADAS. — E' preciso observar que se se trata do valor actual de n annuidades de renda adiantada, isto é, a pagar no principio de cada anno, o primeiro pagamento sendo no acto da acquisição não soffre desconto; e os seguintes serão descontados por 1, 2 ..... até $(n-1)$ annos. Portanto, a formula (b), no caso de n annuidades adiantadas, deverá ser multiplicada por r, pois que neste caso ha um anno menos de desconto em cada pagamento. De que resulta :

$$\frac{r-r^{-(n-1)}}{t} = 1 + \frac{1-r^{-(n-1)}}{t}. \qquad (c)$$

Segue se que com as quantidades tabulares (Tab. V), sendo

$$P_n$$

o valor actual de n annuidades exigiveis no fim de cada anno consecutivamente, o valor das n annuidades exigiveis no principio de cada anno (o primeiro *inclusive*), será :

$$1 + P_{n-1}.$$

O que é o mesmo que calcular pelas formulas (a) *ou* (b) *o presente valor de* $n-1$ *annuidades, e addicionar ao resultado a primeira sem desconto.*

Com estes signaes a equação precedente (c) póde exprimir-se assim :

$$rP_n = 1 + P_{n-1};$$

que fornece um meio facil para a construcção da taboa do presente

valor de annuidades: do valor de $(n-1)$ annuidades derivando-se o valor de n annuidades; pois que

$$P_n = \frac{1+P_{n-1}}{r}.$$

§ IV. — ANNUIDADES OU RENDAS COBRAVEIS POR FRACÇÕES

Muitas vezes as annuidades são pagas por fracções em correspondentes periodos do anno.

Destingamos dois casos:

1.º, *O juro annual é capitalizado pelas mesmas fracções.*
2.º, *O juro é capitalizado annualmente.*

Primeiro caso. — O calculo das anuuidades pagaveis por fracções com o juro capitalizado pelas mesmas fracções é analogo ao das equações (*a*) do § 1º (*a*) do § 2º e (*a*) do § 3º desta Secção, observando-se que se a annuidade a fôr a pagar m vezes por anno, cada pagamento torna-se $\frac{a}{m}$, a taxa do juro $\frac{t}{m}$, e a capitalização m vezes por anno.

Procuremos a somma de annuidades collocadas por fracções no principio de cada periodo.

Seja:

n, o numero de annos ou annuidades;

a, o valor de uma annuidade a collocar $\frac{a}{m}$ no principio de cada $\frac{1}{m}$ do anno;

$\frac{t}{m}$, a taxa do juro composto nos mesmos periodos da collocação.

Um pagamento com seu juro tornar-se-ha em um periodo. $\frac{a}{m}\times\left(1+\frac{t}{m}\right)$

Em m periodos, isto é, n'um anno ..... $\frac{a}{m}\times\left(1+\frac{t}{m}\right)^m$

E em n annos ..... $\frac{a}{m}\times\left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn}$.

Teremos a serie:

$$\frac{a}{m}\left\{\left(1+\frac{t}{m}\right)+\left(1+\frac{t}{m}\right)^2\ldots+\left(1+\frac{t}{m}\right)^m+\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m+1}+\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m+2}\ldots\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{t}{m}\right)^{2m}\ldots+\left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn}\right\}.$$

Vide as formulas *(f)* e *(g)* do § 6º da Secç. I.

Pelo methodo empregado no § 1º desta Secção acharemos a somma Q' de todos os pagamentos:

$$Q' = \frac{a}{m}\times\frac{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn+1}-\left(1+\frac{t}{m}\right)}{\left(\frac{t}{m}\right)}, \qquad (a)$$

ou

$$Q' = a\times\frac{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn+1}-\left(1+\frac{t}{m}\right)}{t} \qquad (b)$$

Exemplo.—*Seja a annuidade de 1:000$000 réis collocada por metade no principio de cada semestre: quanto somma no fim de 15 annos com o juro de 6 % capitalizado aos semestres?*

Pela ultima formula *(b)*, com o auxilio da Tab. I, fazendo $m = 2$, $n = 15$ e $t = 0.06$, tem-se:

$$1000000\times\frac{(1.03)^{31}-1.03}{0.06} = 24:501\$339.$$

Nas Taboas que dão os valores de S_N (Tab. III) acha-se o multiplicador de $\frac{a}{m}$ da penultima formula *(a)*, na columna $\frac{t}{m}$ e alinhamento de mn.

Tomando portanto a quantidade que se acha na Taboa no alinhamento de mn, e na columna marcada $\frac{t}{m}$, e multiplicando por esta quantidade a $\frac{1}{m}$ parte da annuidade, obtem-se o mesmo resultado.

Deste modo no exemplo proposto, como $m = 2$, metade da annuidade ao juro de metade da taxa annual em dobrado numero de annos (30), importa:

$$500\$000 \times 49.002678 = 24:501\$339;$$

que é o mesmo valor.

Se m fosse igual a 3, é evidente que deveria tomar-se o terço da annuidade, o terço da taxa e o triplo dos annos; e assim por diante.

Somma de annuidades de renda pagaveis por partes no fim dos periodos.

Tomando as mesmas notações com a differença sómente de $\frac{a}{m}$ representar a renda *no fim* e não no principio dos periodos, será a ultima prestação $= \frac{a}{m}$; e a primeira $= \frac{a}{m} \times \left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn-1}$.

Sendo K' a sua somma, é evidente que basta dividir a equação (a) por $\left(1+\frac{t}{m}\right)$, para ter:

$$K' = \frac{a}{m} \times \frac{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(\frac{t}{m}\right)}, \qquad (c)$$

ou

$$K' = a \times \frac{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn} - 1}{t}. \qquad (d)$$

Fazendo a mesma reflexão que anteriormente, mas a respeito da taboa que dá os valores de Σ_N (Tab. IV), podemos, empregando a penultima formula (c), *determinar a somma de 15 annos de renda de 1:000$000 devida por metade no fim de cada semestre com os juros de 6 % annuaes capitalizados tambem por semestre*:

$$500000 \times 47.575415 = 23.787\$707.$$

Veja-se a Tab. IV no alinhamento de $mn = 30$, columna — $\frac{t}{m} = 3\,\%$ —.

Presente valor de annuidades ou rendas pagaveis por partes no fim de cada periodo do anno.

Seja A' o presente valor, e as mais notações como nos dois casos precedentes.

O primeiro pagamento descontado é $\dfrac{\left(\frac{a}{m}\right)}{\left(1+\frac{t}{m}\right)}$, e o ultimo é $\dfrac{\left(\frac{a}{m}\right)}{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn}}$.

Vide as formulas (*h*) e (*i*) do § 6°, Secç. I.

Se na serie que serviu para a equação (*a*), em lugar de multiplicarmos, dividirmos $\frac{a}{m}$ por cada termo, obteremos a serie cuja somma, pelos processos já conhecidos, dará o presente valor da fracção $\frac{1}{m}$ da annuidade pagavel no fim de cada periodo $\frac{1}{m}$ do anno, com os descontos á taxa $\frac{t}{m}$ (que é a taxa annual repartida por m):

$$A' = \frac{a}{m} \times \frac{1-\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-mn}}{\left(\frac{t}{m}\right)}, \qquad (e)$$

ou

$$A' = a \times \frac{1-\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-mn}}{t} \qquad (f)$$

Exemplo.—*Requer-se o presente valor de uma renda de 1:000$000 pagavel durante 15 annos por metade em cada semestre, descontada a 6 % annuaes capitalizados aos semestres.*

Tomando na Tab. II a quantidade $\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-mn} = (1.03)^{-30}$ teremos:

$$1000000 \times \frac{1-0.41198676}{0.06} = 9:800\$220.$$

Nas Taboas que dão os valores de P_n (Tab. V) acha-se o multiplicador de $\frac{a}{m}$ da penultima equação (e); portanto acharemos o *presente valor*, tomando a quantidade do alinhamento de $mn = 30$, columna—$\frac{t}{m} = 3\ \%$— :

$$500000 \times 19.60044 = 9:800\$220.$$

O que dá o mesmo resultado.

Sendo as annuidades *adiantadas*, faremos as mesmas reflexões da *nota* do § 3° desta Secção, e acharemos para valor actual:

$$\left\{1+\frac{1-\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-(mn-1)}}{\left(\frac{t}{m}\right)}\right\}\times\frac{a}{m}. \qquad (g)$$

Sejão as annuidades do precedente exemplo, mas adiantadas.

Tomando na Tab. V a quantidade da columna — 3 % — no alinhamento de $29 = mn-1$, teremos:

$$(19.188454+1)\times 500000 = 10:094\$227.$$

Segundo caso —Para o calculo das annuidades pagaveis por fracções em correspondentes periodos do anno, mas o juro a capitalizar ao anno, teremos pela equação (d) bis do § 6°, da Secç. I, que a unidade mais o juro afferente a cada pagamento $\frac{a}{m}$ será $(1+t)^{\frac{1}{m}}$.

Tomando por $(1+t)$ o seu valor r, teremos a serie:

$$\frac{a}{m}\times\left\{r^{\frac{1}{m}}+r^{\frac{2}{m}}\ldots+r+r^{\frac{m+1}{m}}+r^{\frac{m+2}{m}}\ldots+r^2+r^{\frac{2m+1}{m}}+r^{\frac{2m+2}{m}}\ldots+r^n\right\}.$$

Fazendo a somma pelo methodo já conhecido tem-se a quantia Q_1,

somma de n annuidades collocadas por $\frac{1}{m}$ no principio de cada periodo :

$$Q_1 = \frac{a}{m} \times \frac{(1+t)^{n+\frac{1}{m}} - (1+t)^{\frac{1}{m}}}{(1+t)^{\frac{1}{m}} - 1}; \qquad (h)$$

e tambem (dividindo cada termo da relação por $(1+t)^{\frac{1}{m}}$) :

$$Q_1 = \frac{a}{m} \times \frac{(1+t)^n - 1}{1-(1+t)^{-\frac{1}{m}}}. \qquad (i)$$

A Tab. IV, que fornece a somma das annuidades collocadas no fim do anno, tem por expressão (equação (b) do § 2º) :

$$\frac{r^n - 1}{t};$$

multiplicando portanto as quantidades tabulares por

$$\frac{t}{1-(1+t)^{-\frac{1}{m}}},$$

obtem-se o multiplicador de $\frac{a}{m}$ na equação (i).

Exemplo.—*Pede-se a somma de 15 annuidades de 485$643 réis collocadas por metade no principio de cada semestre, ao juro de 6 % capitalizado ao anno.*

Fazendo a equação (i), $a = 485643$, $m = 2$; $n = 15$ e $t = 0.06$; tomando na Tab. I a quantidade indicada, e no Supplemento á Tab II o valor do desconto n'um semestre a juro annual, tem-se :

$$242821{,}5 \times \frac{1.39655819}{0.02871414} = \text{Rs. } 11{:}810\$013.$$

O mesmo resultado se obtem com a Tab. IV multiplicando a quantidade tabular por metade da annuidade e pela taxa do juro dividindo-se o producto pelo divisor acima.

Se as fracções da annuidade forem pagaveis no fim de cada periodo é claro que cada termo da série precedente deverá dividir-se por $r^{\frac{1}{m}}$, resultando ser o primeiro termo—1— e o ultimo $r^{n-\frac{1}{m}}$. Obteremos portanto a somma K_1 de n annuidades collocadas pela fracção $\frac{1}{m}$ no fim de cada periodo:

$$K_1 = \frac{a}{m} \times \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t)^{\frac{1}{m}} - 1}. \qquad (k)$$

Veremos, como acima, pela expressão dos valores fornecidos pela Tab. IV, que multiplicando a quantidade tabular por

$$\frac{t}{(1+t)^{\frac{1}{m}} - 1},$$

tem-se o multiplicador de $\frac{a}{m}$.

Exemplo.—*Sejão 15 annuidades de 500$000 pagas por metade no fim da cada semestre, com os juros á taxa de 6 por cento compostos ao anno. Quanto importão?*

Aqui, $a = 500\$000$; e os mais valores como precedentemente.

Tomando na Tab. IV a quantidade na columna —6 %— e no 2° Supplemento á Tab. I a do alinhamento de 6 na columna —6 mezes—, teremos:

$$250000 \times \frac{23.27596988 \times 0.06}{0.02956301} = \text{Rs. } 11.810\$013.$$

Obteria-se o mesmo resultado se tomassemos a Tab. I, segundo a formula (k).

Indaguemos agora qual é o presente valor A_1 de annuidades a pagar por fracções no fim de correspondentes periodos do anno, sendo os descontos a juro composto ao anno.

Em lugar de multiplicarmos, dividamos $\frac{a}{m}$ por cada termo da serie que serviu para estabelecer a equação (h), e fazendo a somma pelos methodos já expostos, teremos:

$$A_1 = \frac{a}{m} \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{(1+t)^{\frac{1}{m}}-1}. \qquad (l)$$

Vimos no § 3º que a expressão das quantidades da Tab. V é:

$$\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}.$$

Multiplicando portanto a quantidade da Tab. V, relativa ao caso, por

$$\frac{t}{(1+t)^{\frac{1}{m}}-1},$$

obtem-se o multiplicador de $\frac{a}{m}$ na equação (l).

Exemplo.—*Pede-se o presente valor de 15 annuidades de 500$000 réis—a pagar por metade—no fim de cada semestre, fazendo-se os descontos ao juro de 6 % composto ao anno.*

Substituindo na formula (l) as quantidades litteraes pelos respectivos valores do exemplo precedente, e com o auxilio da Tab. II e do 2º supplemento á Tab. I, teremos:

$$250000 \times \frac{58273494}{2956301} = \text{Rs. } 4.927\$906.$$

Obteria-se o mesmo resultado por meio da Tab. V, com o multiplicador acima.

Comquanto o presente valor de n annuidades adiantadas seja o desconto de $n-1$, addicionando-lhe a primeira que não soffre desconto (como se tem visto nos casos precedentes), comtudo nos casos de annuidades por fracções, e o juro composto ao anno ou por outras fracções sem relação com as da annuidade, convém estabelecer formulas que evitem o mais possivel expoentes fraccionarios, para facilidade do calculo pelo emprego das Taboas.

Formando uma série *ad instar* da que se formou para a equação (h), cujos termos, divisores de $\frac{a}{m}$, sejão o primeiro—1—e o ultimo $r^{n-\frac{1}{m}}$, veremos que a sua somma é igual á formula (l) multiplicada por $r^{\frac{1}{m}}$.

Portanto, sendo B_1 o presente valor das annuidades adiantadas, teremos:

$$B_1 = \frac{a}{m} \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{1-(1+t)^{-\frac{1}{m}}}. \qquad (m)$$

valor, que tambem se póde obter pela Tab. V, multiplicando a quantidade respectiva (n annuidades com o desconto á taxa (t) annual) por:

$$\frac{t}{1-(1+t)^{-\frac{1}{m}}}.$$

Exemplo.—*Qual é o valor actual de 15 annuidades de 485$643 réis a pagar por metade no principio de cada semestre, feitos os descontos ao juro de 6 % composto ao anno?*

Na formula (m), fazendo $\frac{a}{m} = 242821,5$, $n = 15$, $t = 0.06$ e $m = 2$; e tomando na Tab. II e seu supplemento os valores indicados, teremos:

$$242821,5 \times \frac{58273494}{2871414} = \text{Rs. } 4:927\$906.$$

Resultado que tambem se póde obter com a Tab. V, como se tem explicado.

As formulas (*a*) do § 1° Secç. I, e (*i*), (*k*), (*l*) e (*m*) deste §, servem de verificação umas ás outras, como se vai ver pela analyse dos resultados precedentes :

15 annuidades de:	Somma	Valor actual
485$643 por metade *no principio* de cada semestre, formulas (*i*) e (*m*).....	11:810$013	4:927$906
500$000 por metade *no fim* de cada semestre formulas (*k*) e (*l*)	11:810$013	4:927$906

Para se terem Rs. 11.810$013 é necessario collocar 242$821,5 réis no principio, ou 250$000 no fim, de cada semestre.

Como a somma das annuidades é o importe de um capital actual com os seus juros compostos, deve neste caso, tanto para uma como para outra annuidade, ser o mesmo valor actual de Rs. 4.927$906, como se prova com a equação (*a*) do § 1°, Secç. I, tomando $(1.06)^{15}$ na Tab. I columna—6 %—:

$$4927906 \times 2.39655819 = \text{Rs. } 11.810\$013.$$

Portanto, com uma ou outra daquellas annuidades, no principio ou no fim de cada semestre, paga-se em 15 annos este capital com os seus juros de 6 % ao anno.

§ V.—ANNUIDADES POR INTEIRO E JURO CAPITALIZADO POR FRACÇÕES.

As annuidades tambem podem ser pagaveis por inteiro no principio ou no fim do anno, mas capitalizando-se em menores periodos os juros annuaes.

Trata-se de determinar a somma Q'' que podem produzir, com os juros, n annuidades collocadas no principio de cada anno, sendo $\frac{1}{m}$ do juro annual composto cada $\frac{1}{m}$ do anno.

Formaremos uma serie semelhante á do § 1º desta Secç.

Pelas formulas (*f*) e (*g*) do § 6º.—Secç. I, vê-se que uma quantia *a* torna-se no fim de um anno, capitalizando *m* vezes no mesmo anno a parte do juro correspondente,

$$a \times \left(1+\frac{t}{m}\right)^{m}:$$

primeiro termo da serie. E no fim de *n* annos,

$$a \times \left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn}:$$

ultimo termo da serie.

Subtrahindo, como precedentemente, o menor termo do maior multiplicado pela taxa do juro mais 1, e dividindo a differença pela taxa, obtem se :

$$Q'' = a \times \frac{\left\{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m}\right\}^{(n+1)} - \left(1+\frac{t}{m}\right)^{m}}{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m} - 1}; \qquad (a)$$

e tambem :

$$Q'' = a \times \frac{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn} - 1}{1-\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-m}}. \qquad (a)\ bis$$

Exemplo.—*Quanto sommão 4 annuidades de 100$000 réis cada uma, pagas por inteiro no principio de cada anno, com o juro annual de 6 % capitalizado por metade em cada semestre?*

Neste caso,

$$t = 0.06;\ m = 2;\ n = 4.$$

Tomando nas Taboas I e II os valores indicados na segunda equação (*a*) *bis*, acha-se :

$$Q'' = 100\$000 \times \frac{1.26677008 - 1}{1 - 0.94259591} = 464\$723.$$

N'uma Taboa que dê os valores de Σ_N (4ª) correspondentes á taxa $\frac{t}{m}$, acha-se para mn annuidades :

$$\Sigma_{mn} = \frac{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn}-1}{\left(\frac{t}{m}\right)}.$$

Multiplicando pois a quantidade tabular por

$$\frac{\left(\frac{t}{m}\right)}{1-\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-m}}.$$

obtem-se o multiplicador de a na equação (a) *bis* :

Neste caso achar-se-ha por meio da Tab. IV no alinhamento de $8 = mn$, columna — 3 % $= \frac{t}{m}$ — :

$$Q'' = 100\$000 \times \frac{8.892336 05 \times 0.03}{1-0.942595 91} = \text{Rs. } 464\$723.$$

Resultado igual.

A Tab. II fornece o termo negativo do divisor.

Para determinar a somma K'' das annuidades (sendo a o valor de cada uma) pagaveis no fim do anno por inteiro, mas capitalizando-se m vezes cada anno a parte correspondente dos juros, acha-se, em conformidade com as formulas (f) e (g) do § 6º—Secç. I, e (b) do § 2º—Secç. II, a seguinte (com as mesmas notações precedentes) :

$$K'' = a \times \frac{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m}-1}. \qquad (b)$$

Exemplo.—*Sendo 4 annuidades de 100$000 réis pagaveis no fim de cada anno, e o juro de 6 por cento annual capitalizado por metade em cada semestre, quanto é a somma devida tendo ellas ficado em atrazo ?*

Tomando na Tab. I, columna—3 % —os valores indicados,

$$K'' = 100\$000 \times \frac{1.26677008-1}{1.0609-1} = \text{Rs. } 438\$046 .$$

Com a expressão acima formulada das quantidades fornecidas pela Tab. IV, vê-se que multiplicando a quantidade tabular respectiva por

$$\frac{\left(\frac{t}{m}\right)}{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m}-1}$$

obtem-se o factor de a na equação precedente (b) para determinar o valor de K''.

Neste caso achar-se-ha pela Taboa IV :

$$K'' = 100000 \times \frac{8.89233605 \times 0.03}{1.0609-1} = 438\$046.$$

Resultado igual.

A Tab. I fornece o termo positivo do divisor.

O presente valor A'' de n annuidades (sendo a cada uma) a pagar por inteiro no fim de cada anno, mas compondo-se $\frac{1}{m}$ da taxa t annual do desconto m vezes por anno, determina-se, tendo em vista as formulas (h) e (i) do § 6º, Secç. I e (a) do § 3º desta Secção, pela seguinte equação :

$$A'' = a \times \frac{1-\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m}-1} \qquad (c)$$

Exemplo.—*Qual é o presente valor de 4 annuidades de renda de 100$000 réis a pagar no fim do anno, sendo o desconto de 6 por cento composto por metade em cada semestre?*

Tomando $(1.03)^{-8}$ na Tab. II, acharemos :

$$A'' = 100000 \times \frac{1-0.78940923}{1.0609-1} = 345\$797.$$

Nas Taboas de annuidades que deem os valores de P_N (Tab. V) para a taxa $\frac{t}{m}$ e para mn annuidades, a quantidade tabular é o resultado desta expressão:

$$\frac{1-\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-mn}}{\left(\frac{t}{m}\right)}$$

Portanto, multiplicando a quantidade tabular por

$$\frac{\left(\frac{t}{m}\right)}{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m}-1}.$$

obtem-se o multiplicador de a na equação (c).

Neste caso achar-se-ha pela Tab. V:

$$A'' = 100000 \times \frac{7.01969219 \times 0.03}{1.0609-1} = 345\$797.$$

Resultado igual.

Para ter o presente valor B'' de n annuidades adiantadas basta multiplicar a equação precedente (c) por $\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m}$, como se explicou no § 4.º. Aqui não ha a desvantagem de expoente fraccionario, como no 2º *caso* do dito §, em substituir n por $n-1$ na dita equação (c) addicionando ao resultado a primeira annuidade sem desconto. Póde-se porém fazer uso da seguinte expressão do presente valor de annuidades a pagar por inteiro no principio do anno e o desconto a juro composto m vezes por anno:

$$B'' = a \times \frac{1-\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-mn}}{1-\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-m}}. \qquad (d)$$

Como precedentemente, póde-se empregar a Tab. V, multiplicando a quantidade tabular por

$$\frac{\left(\frac{t}{m}\right)}{1-\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-m}}.$$

Para verificar todas as precedentes proposições, determinemos o presente valor de 5 annuidades de 100$000 réis com os mesmos descontos que no exemplo antecedente.

Este presente valor deverá ser igual ao das 4 annuidades pela equação (*c*) com a addição de mais uma. E' o que se verifica pela equação (*d*), tomando na Tab. II as quantidades indicadas:

$$100000\times\frac{1-(1.03)^{-10}}{1-(1.03)^{-2}} = 100000\times\frac{25590609}{5740409} = 445\$797.$$

§ VI.—ANNUIDADES PAGAS POR FRACÇÕES, E O JURO CAPITALIZADO EM OUTRAS FRACÇÕES. FORMULAS GERAES DAS ANNUIDADES.

Reunindo todos os casos precedentes, tratemos de determinar a somma ou o presente valor de certo numero de annuidades pagas ou a pagar por fracções em fracções correspondentes do anno, isto é, distribuindo cada annuidade a em m pagamentos $\frac{a}{m}$ por anno; mas o juro ou desconto annual sendo composto por partes em outras fracções do anno sem relação com aquellas; isto é, sendo $\frac{t}{\mu}$ a parte a capitalizar μ vezes por anno da taxa t annual.

Com estas condições é preciso determinar a taxa afferente a cada fracção da annuidade$=\frac{a}{m}$.

Devendo $\frac{1}{\mu}$ da taxa t compor-se μ vezes por anno, a taxa do juro mais — 1 —, no fim de um anno tornar-se-ha

$$\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\mu};$$

como se demonstrou para a equação (*f*) do § 6º, Secç. I, substituindo aqui m por μ.

Semelhantemente, segundo a demonstração para as formulas (*a*) e (*d*) do mesmo §, pondo aqui $\frac{1}{m}$ por $\frac{1}{k}$, a taxa do juro mais — 1 — afferente a cada periodo de pagamento $\frac{1}{m}$ do anno será :

$$\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}.$$

No fim de um anno tendo havido m pagamentos, este valor tornar-se-ha segundo a mesma doutrina,

$$\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}\times m}=\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\mu};$$

e no fim de n annos:

$$\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{n\mu}.$$

Estabelecido isto, façamos para simplificar,

$$\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}=\delta;$$

e teremos a somma Q''' de n annuidades pagas $\frac{a}{m}$ no principio de cada $\frac{1}{m}$ do anno (*vide* a demonstração da equação *a* no § 4° desta Secção) :

$$Q'''=\frac{a}{m}\times\left(\delta+\delta^2+\delta^3\ldots+\delta^{mn}\right)=\frac{a}{m}\times\frac{\delta^{mn+1}-\delta}{\delta-1}.$$

Pondo em lugar de δ o seu valor $\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}$, virá :

$$Q'''=\frac{a}{m}\times\frac{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{n\mu}-1}{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\frac{\mu}{m}}}. \qquad (a)$$

EXEMPLO.—*Quanto importão 4 annuidades de 200$000 réis que forão collocadas por metade no principio de cada semestre, compondo-se de 4 em 4 mezes o juro annual de 6 %?*

Aqui,

$$\frac{a}{m} = 100\$000\,;\quad t = 0{,}06\,;\quad n = 4\,;\quad m = 2\,;\quad \mu = 3.$$

Portanto substituindo estes valores na formula precedente, e tomando $(1.02)^{12}$ na Tab. I, tem-se:

$$Q''' = 100000 \times \frac{(1.02)^{12} - 1}{1 - (1.02)^{-\frac{3}{2}}} = 100000 \times \frac{1.26824179 - 1}{1 - 0.97073289} = 916\$529$$

Eis aqui a prova:

Compondo-se a terça parte do juro acima dado tres vezes no anno, segue-se que — 1 — com o seu juro no anno completo é igual a $(1.02)^3$, ou 1.061208; cujo logarithmo (obtido pela Tab. VII), é 0.0258005154.

Metade da annuidade são 100$000 réis pagos cada semestre; portanto a primeira metade vence 4 annos de juros, a segunda $3\frac{1}{2}$, e assim por diante até que a ultima vence $\frac{1}{2}$ anno.

Temos pois no fim do periodo os seguintes valores:

1.ª metade da annuidade	$\times$	$(1.02)^{3\times4}$	= 126$824
2.ª dita.....	$\times$	$(1.02)^{3\times3\frac{1}{2}}$	= 123$112
3.ª dita.....	$\times$	$(1.02)^{3\times3}$	= 119$509
4.ª dita.....	$\times$	$(1.02)^{3\times2\frac{1}{2}}$	= 116$012
5.ª dita.....	$\times$	$(1.02)^{3\times2}$	= 112$616
6.ª dita.....	$\times$	$(1.02)^{3\times1\frac{1}{2}}$	= 109$320
7.ª dita.....	$\times$	$(1.02)^{3\times1}$	= 106$121
8.ª dita.....	$\times$	$(1.02)^{3\times\frac{1}{2}}$	= 103$015
		Somma	916$529

Resultado igual ao que é dado pela formula.

A Tab. VII (1ª Parte) fornece o logarithmo de cada multiplicador acima, multiplicando o logarithmo correspondente á taxa 2 % pelo respectivo expoente.

Em uma Taboa que dê os valores de Σ_N (Tab. IV), para a taxa $\frac{t}{\mu}$ correspondente a μn annos, a expressão da quantidade tabular é:

$$\frac{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{n\mu}-1}{\left(\frac{t}{\mu}\right)};$$

substituindo na formula (*a*) esta expressão por $\Sigma_{n\mu}$, póde tambem obter-se o valor de Q''' pela seguinte equação:

$$Q''' = \frac{a}{m}\times\Sigma_{n\mu}\times\frac{\left(\frac{t}{\mu}\right)}{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\frac{\mu}{m}}}. \qquad (a)\ bis$$

isto é, multiplicando a quantidade tabular por este terceiro factor, tem-se o multiplicador de $\frac{a}{m}$.

Tomando na Tab. IV a quantidade da columna — 2 % — no alinhamento de 12 ($n\mu$), tem-se:

$$100\$000\times\frac{13.41208973\times 0{,}02}{1-0.97073289} = 916\$529.$$

Consideremos agora a somma K''' das annuidades de rendas pagaveis por fracções *no fim* de cada fracção do anno, e tudo o mais como no caso precedente.

A ultima prestação não vencendo juros será $\frac{a}{m}$; e a primeira com os seus juros tornar-se-ha $\left(\frac{a}{m}\times\hat{z}^{mn-1}\right)$. Basta portanto dividir por $\hat{z}$ o valor de Q''' (veja-se acima), para ter:

$$K''' = \frac{a}{m}\times\frac{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\mu n}-1}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}-1}. \qquad (b)$$

Usando dos mesmos valores do caso precedente, teremos:

$$K''' = 100\$000\times\frac{1.26824179-1}{1.0301495-1} = 889\$705.$$

Com a taboa de annuidades que dê os valores de Σ_N (Tab. IV)

para a taxa $\frac{t}{\mu}$ correspondente a μn annos, póde-se obter a mesma somma, d'este modo:

$$K''' = \frac{a}{m} \times \Sigma_{n\mu} \times \frac{\left(\frac{t}{\mu}\right)}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}} - 1}. \qquad (b)\ bis$$

De que para a questão acima resulta:

$$100\$000 \times \frac{13.41208972 \times 0.02}{1.0301495 - 1} = 889\$705.$$

Verifica-se a exactidão destas formulas, sommando as sete ultimas parcellas do calculo precedente (que aqui são as que vencem juro), e addicionando-lhe 100$000 que é o ultimo pagamento que não vence juro.

Para o presente valor A''' das annuidades a pagar em fracções no fim de cada fracção correspondente do anno, sendo a taxa do desconto annual composta por partes em outras fracções do anno sem relação com as primeiras, usando das notações que precedem, tem-se a serie:

$$\frac{a}{m} \times \left\{ \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^3} \cdots\cdots + \frac{1}{\delta^{\mu n}} \right\}.$$

E portanto, pondo por δ o seu valor $\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}$, virá:

$$A''' = \frac{a}{m} \times \frac{1 - \left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\mu n}}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}} - 1}. \qquad (c)$$

Exemplo.—*Sejão 4 annuidades de 200$000 a pagar por metade no fim de cada semestre, e o terço do desconto de 6 % annual composto de 4 em 4 mezes; qual é o presente valor?*

Substituindo na equação precedente, m, t, n, μ por 2, 0.06, 4 e 3, e com o auxilio da Tab. II, obtem-se:

$$A''' = \frac{200\$000}{2} \times \frac{1-\left(1+\frac{0.06}{3}\right)^{-12}}{\left(1+\frac{0.06}{3}\right)^{\frac{3}{2}}-1} = 100000 \times \frac{1-0.78849318}{1.0301495-1}.$$

Donde,

$$A''' = \text{Rs. } 701\$526.$$

Eis aqui a prova:

1.ª metade da annuidade	$\times \frac{1}{(1.02)^{1,5}}$ =	97$073
2.ª dita...	$\times \frac{1}{(1.02)^{3}}$ =	94$232
3.ª dita.....	$\times \frac{1}{(1.02)^{4,5}}$ =	91$474
4.ª dita.....:.....	$\times \frac{1}{(1.02)^{6}}$ =	88$797
5.ª dita.....	$\times \frac{1}{(1.02)^{7,5}}$ =	86$199
6.ª dita.....	$\times \frac{1}{(1.02)^{9}}$ =	83$675
7.ª dita.....	$\times \frac{1}{(1.02)^{10,5}}$ =	81$227
8.ª dita.....	$\times \frac{1}{(1.02)^{12}}$ =	78$849
	Somma....	701$526

Que é o mesmo valor achado pela formula acima.

Para se obterem os logarithmos dos multiplicadores acima, veja-se a NOTA do § 2º da Secç. I.

Em uma taboa do presente valor das annuidades (Tab. V) que dê as quantidades P_x para a taxa $\frac{t}{\mu}$, a que corresponde a μn annos é o resultado da seguinte expressão:

$$\frac{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\mu n}}{\left(\frac{t}{\mu}\right)}.$$

Obtem-se portanto o factor de $\frac{a}{m}$ na formula acima (*c*), pondo $P_{\mu n}$ pelo seu valor :

$$A''' = \frac{a}{m} \times P_{\mu n} \times \frac{\left(\frac{t}{\mu}\right)}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}-1}. \qquad (c)\ bis$$

O valor actual, P_n, de 12 annuidades sendo cada uma igual a — 1 — c os descontos a 2 % ao anno, é 10.57534122 (Tab. V). Achar-se-ha :

$$100000 \times \frac{10.57534122 \times 0.02}{1.0301495-1} = 701\$526.$$

Como nos §§ precedentes, formulemos o valor actual de annuidades adiantadas nas condições deste §. Como já se demonstrou no § 4°, 2° *Caso*, basta multiplicar a precedente equação (*c*) por $\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}$ para obter a seguinte equação sendo B''' o presente valor :

$$B''' = \frac{a}{m} \times \frac{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\mu n}}{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\frac{\mu}{m}}}. \qquad (d)$$

Obteremos tambem o multiplicador de $\frac{a}{m}$ por meio da Tab. V, multiplicando a quantidade tabular por :

$$\frac{\left(\frac{t}{\mu}\right)}{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\frac{\mu}{m}}}.$$

EXEMPLO.—*Sejão as 4 annuidades de 200$000 réis com os mesmos descontos do exemplo precedente, mas devendo ser pagas por metade no principio de cada semestre. Qual é o presente valor?*

Este valor deve ser igual a 722677, somma dos sete pagamentos acima calculados primeiramente, e mais o primeiro pagamento de 100$000 que não soffre desconto.

E' o que se verifica pela formula (*d*):

$$B''' = \frac{200000}{2} \times \frac{1-\left(1+\frac{0.06}{3}\right)^{-12}}{1-\left(1+\frac{0.06}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}} = 100000 \times \frac{1-0.78849318}{1-0.97073289} = 722677 .$$

E' portanto o presente valor:

Rs. 722$677.

Estas formulas têm applicação em todos os casos de pagamento de annuidades por inteiro ou por partes em correspondentes partes do anno, e das mesmas ou diversas epocas de capitalização do juro. São pois formulas geraes em que basta determinar as partes $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{m}$ referindo-as devidamente aos periodos de capitalização do juro e do pagamento da annuidade, para se obter a solução em todos os casos.

Nos §§ 4° e 5°, μ é representado por m; e no § 5°, $m = 1$.

NOTA SOBRE OS ELEMENTOS DA ANNUIDADE.—Temos até aqui considerado a annuidade como uma quantidade incomplexa, que recebendo os incrementos dos seus juros, ou sendo descontada por elles, dá em resultado certa quantia. *A annuidade* porém é decomponivel em duas partes: *fundo d'amortização de um capital, e juro annual desse capital.* Em todos os casos precedentes o juro, mesmo quando composto em periodos differentes, é pago ao mesmo tempo que a amortização, segundo as fracções em que se paga a annuidade que os comprehende. Ha pois impropriedade na expressão de alguns autores,—*Annuidade e juro pagos ao mesmo tempo.* Deve dizer-se: —*Annuidade cujos componentes,—juro e amortização, são pagos ao mesmo tempo*—.

Na Secção 3ª se tratará especialmente da pratica geralmente seguida

de pagamento dos juros separadamente do pagamento da quota da amortização: do que resultão duas contas distinctas.

Analysemos os casos dos exemplos ás formulas (*b*) e (*c*) deste §.

No exemplo á formula (*c*), se as annuidades em lugar de serem descontadas receberem os incrementos dos seus juros, dá-se o caso da formula (*b*); o que mostra que a annuidade de 200$000, paga por metade em cada semestre durante 4 annos, descontada á taxa de 6 % de juro annual composto aos quatrimestres, amortiza a quantia actual de 701$526 e seus juros. Com effeito, tomando na Taboa I, $(1.02)^{3\times4} = 1.26824176$, tem-se,

$$701526 \times 1.26824176 = 889705,$$

que é a quantia achada no dito exemplo á formula (*b*).

Ora o juro de 2 % por quatrimestre é 14$030.52, que repetido e capitalizado em 12 quatrimestres importa em $14030,52 \times 13,41208973 = 188179$ (tomando na Tab. IV a quantidade da columna — 2 %— no alinhamento de 12). De que resulta:

$$701526 + 188179 = 889705.$$

N'um e n'outro caso, metade da annuidade de 200$000 decompõe-se em:

Juro annual de 6 % composto por um terço de 4 em 4 mezes, mas pago por semestre, $701526 \times \left\{ (1.02)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\}$ =	21$150,7
Quota de amortização..... =	78$849,3
A pagar em cada semestre.....	100$000

Calculando o factor da metade da annuidade pela formula (*b*),

$$\frac{(1.02)^{12} - 1}{(1.02)^{\frac{3}{2}} - 1} = \frac{0.26824179}{0.0301495} = 8,897056,$$

Tem-se:

Quota, $78849,3 \times 8,897056$ =	701526
Juro, $21150,7 \times 8,897056$ =	188179
Capital e seus juros no fim de 4 annos..... =	889705

No final do § 16º, Secção III,—NOTA—achar-se-hão mais applicações destas formulas.

§ VII.—DURAÇÃO DA RENDA OU ANNUIDADE.

Precisa-se muitas vezes de saber em quantos annos certa annuidade com seus juros compostos perfez ou deve perfazer tal quantia? E tambem que numero de annuidades de certo valor, descontadas, devem importar certa quantia actual (presente valor)?

Estas questões serão tratadas mais largamente sob o titulo—AMORTIZAÇÃO—; comtudo póde-se desde ja verificar que as equações (a) do § 1º, (a) do § 2º e (a) do § 3º, desta Secç, fornecem a solução.

Para sabermos em quantos annos n a annuidade a paga no principio do anno produziu a quantia Q, deduziremos da equação (a) § 2º a seguinte que dá o valor de n:

$$n = \frac{\log \left\{ (r-1)\frac{Q}{a} + r \right\}}{\log r} - 1. \qquad (a)$$

Portanto, para ter o numero de annuidades nestas condições, *divide-se a quantia que as annuidades produzem pela annuidade de um anno e multiplica-se pelo juro annual de 1, e a este producto addiciona-se 1 com o seu juro de um anno; faz-se o logarithmo desta somma, o qual se divide pelo logarithmo de 1 com o seu juro de um anno; por fim, subtrahe-se 1 deste quociente.*

Deve-se notar que $\frac{Q}{a}$ dá a somma da annuidade — 1 — com os seus juros compostos que se acha nas taboas; porque sendo

$$S_n : 1 :: Q : a,$$

tem-se:

$$S_n = \frac{Q}{a}.$$

EXEMPLO.—*Quantas annuidades de 400$000 réis pagas no principio de cada anno são precizas para perfazerem com os juros de 5 por cento a quantia de 5:282$715?*

Substituindo na equação acima Q por 5:282$715, a por 400$000 e r

por 1.05, acharemos:

$$n = \frac{\log 1.71033935}{\log 1.05} - 1 = \frac{0.2330823}{0.0211893} - 1 = 10.$$

São pois precisas 10 annuidades.

Como $\frac{Q}{a} = S_n$, póde-se dispensar o calculo tendo uma taboa de annuidades para a taxa do juro proposta; porque procurando na taboa a quantidade S_n, se ella ahi se achar exactamente, logo se vê á margem a que numero n de annos ou annuidades ella corresponde, como se póde verificar no exemplo precedente. Se S_n se não achar exactamente nas taboas, é que n é numero fraccionario: seja $n+\frac{l}{k}$. Neste caso toma-se a differença D entre as duas quantidades S_n e S_{n+1} da taboa, entre as quaes $S_{n+\frac{l}{k}}$ se achar comprehendida; toma-se tambem a differença d entre a quantidade mais baixa S_n da taboa e $S_{n+\frac{l}{k}}$; e pela seguinte proporção se obterá *approximadamente* a fracção que se deve addicionar a n:

$$D : d :: 1 : x = \frac{d}{D}.$$

Exemplo.—*Em que tempo a annuidade de 400$000 réis attingirá o valor de 5:400$000 com os juros de 5 por cento ao anno?*

$$\text{Aqui,} \quad \frac{Q}{a} = \frac{5:400\$000}{400000} = 13.5.$$

Esta quantidade cahe entre as que correspondem a 10 e a 11 annos na Taboa III.

Façamos pois a differença entre estas duas quantidades da taboa:

$$14.91712652 - 13.20678716 = 1.71033936.$$

A differença entre a quantidade proposta e a menor da taboa, é:

$$13.50000000 - 13.20678716 = 0,29321284.$$

A relação das differenças

$$\frac{29321284}{171033936} = 0,1714$$

é que se deve addicionar a 10. Assim, 10,1714 annos será approxima-

damente o tempo em que a annuidade 400$000 attingirá a quantia de 5:400$000 réis.

O valor exacto é $n+\frac{l}{k}=10,1749$. Por aqui se póde vêr o gráo de approximação que pela Taboa se obtem.

No calculo de um determinado numero de annuidades é evidente que não póde haver n fraccionario. E' nos casos de amortização que isto póde ter lugar, quando se destina de ante-mão certa annuidade para amortizar certa quantia, e que isso não possa realizar-se senão em em um numero fraccionario de annos. Tratando da *amortização* analysaremos como determinar as fracções e os valores que lhes correspondem. Para lá remettemos o leitor (Secç. III § 4.º)

Vejamos agora qual é o valor de n quando a annuidade é paga no fim do anno, e tem produzido a quantia K, á taxa t de juros compostos.

Este caso é o da equação (a) do § 2.º

Portanto,

$$n=\frac{\log\left\{(r-1)\frac{K}{a}+1\right\}}{\log r}. \qquad (b)$$

Sendo a quantidade paga no fim de cada anno, acha-se o numero de annos deste modo: *Divide-se a quantia que produzem as annuidades pela annuidade de 1 anno e multiplica-se pelo juro annual de 1, e a este producto addiciona-se 1; depois faz-se o logarithmo desta somma, o qual se divide pelo logarithmo de 1 com o seu juro de 1 anno.*

Dado o presente valor A de certo numero de annuidades não adiantadas (sendo a o valor de cada uma), descontadas á taxa t de juros compostos, determinar o numero n de annuidades.

Pela equação (a) do § 3º, desta Secç., tem-se:

$$r^n=\frac{1}{1-\frac{A}{a}\cdot t}.$$

Portanto,

$$n = \frac{\log\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{A}{a}\,t}\right)}{\log r}. \qquad (c)$$

Como r^n é positivo, deve ser $\frac{A}{a} \cdot t < 1$, e segue-se que o numerador do segundo membro desta equação (c) compõe-se do logarithmo de 1, que é zero, menos o logarithmo de uma fracção decimal, cuja caracteristica é negativa. Portanto, obtem-se o numero de annuidades cujo desconto a um dado juro é uma dada quantia, deste modo: *Divide-se a quantia pela annuidade de um anno e multiplica-se pelo juro annual de 1; este producto subtrahe-se de 1, de que resulta uma fracção decimal; faz-se o logarithmo desta fracção, e invertem-se os signaes, isto é, faz-se a* caracteristica *positiva e a* mantissa *negativa* (veja-se a NOTA ao § 2° da Secç. I); *por ultimo, divide-se o excesso da* caracteristica *sobre a* mantissa *pelo logarithmo de 1 com o seu juro de um anno.*

EXEMPLO.—*Sendo o presente valor 2:492$442, e as annuidades de 200$000, descontadas a 5 por cento,*

$$\frac{A}{a} = 12.46221\,; \quad r = 1.05.$$

E portanto,

$$n = \frac{1-0.5762140}{0.0211893} = \frac{4237860}{211893} = 20.$$

$$n = 20 \text{ annos.}$$

Verifica-se que,

$$2:492\$442 = \frac{1-(1.05)^{-20}}{0.05} \times 200\$000.$$

o que serve de prova.

Veja-se o § 3° da Secç. III.

Se o presente valor dado fôr de annuidades adiantadas, e que este valor seja B, podemos empregar a mesma formula acima (c), fazendo $A = B - a$: o que dará em resultado $n-1$ annuidades descontadas. Addicionando -1 — (que é a annuidade não descontada) a este resultado, teremos o numero n. A equação (c) do § 3° põe isto em evidencia, da qual se collige:

$$B-a = a \times \frac{1-r^{-(n-1)}}{t}. \qquad \text{(c) bis}$$

O que fica dito é em tudo applicavel aos casos de annuidades pagas por partes em correspondentes épocas do anno, e tambem sendo os juros compostos nas mesmas ou em outras épocas.

Vejão-se os §§ 4°, 5° e 6° desta Secção.

Tratarei aqui sómente das formulas do § 6° que dão os valores de Q''', K''', A''' e B''', por serem de applicação geral.

No caso da somma Q''' da collocação $\frac{a}{m}$ no principio de cada $\frac{1}{m}$ do anno, e capitalização $\frac{1}{\mu}$ da taxa de juro annual t em cada $\frac{1}{\mu}$ do anno, obtem-se para n pela equação (a) do § 6°, a seguinte:

$$n = \frac{\log\left[1+\frac{mQ'''}{a}\times\left\{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\frac{\mu}{m}}\right\}\right]}{\mu.\log\left(1+\frac{t}{\mu}\right)}. \qquad (d)$$

Sendo a somma K''' de $\frac{1}{m}$ da renda pagavel no fim de cada $\frac{1}{m}$ do anno e o juro como acima (*vide* a equação (b) do § 6°):

$$n = \frac{\log\left[1+\frac{mK'''}{a}\times\left\{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}-1\right\}\right]}{\mu.\log\left(1+\frac{t}{\mu}\right)}. \qquad (e)$$

Sendo o presente valor A''' de annuidades pagaveis por partes no fim de cada periodo, e juro capitalizavel em differentes épocas como antecedentemente, teremos (equação (c) do § 6°):

$$n = \frac{\log\left[\frac{1}{1-\left\{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}-1\right\}\times\frac{mA'''}{a}}\right]}{\mu.\log\left(1+\frac{t}{\mu}\right)}. \qquad (f)$$

Finalmente, se fôr B''' o presente valor dado de annuidades adian-

tadas com as mesmas condições acima estabelecidas para a equação (*d*), teremos pela equação (*d*) do § 6º:

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{1}{1-\left\{1-\left(1+\dfrac{t}{\mu}\right)^{-\frac{\mu}{m}}\right\}\times\dfrac{mB'''}{a}}\right]}{\mu.\log\left(1+\dfrac{t}{\mu}\right)}. \qquad (g)$$

Obtem-se o valor de n em todos os casos, attribuindo a μ e m os valores que lhes forem relativos pela questão a resolver.

Exemplo.—*Dado o presente valor de 722$677 réis, quantas annuidades de 200$000 réis a pagar por metade no principio de cada semestre deve produzir, descontadas a 6 % composto por 1/3, de 4 em 4 mezes?*

Fazendo na equação (*g*)

$$B''' = 722677;\ a = 200000;$$
$$m = 2;\ \mu = 3 \text{ e } t = 0.06,$$

teremos:

$$n = \frac{\log\left(\dfrac{1}{1-\left\{1-(1.02)^{-\frac{3}{2}}\right\}\times 7.22677}\right)}{3\times\log(1.02)} = \frac{0.1032020}{0.0258005} = 4.$$

722$677 réis produzem 4 annuidades (sendo a primeira metade paga á vista), o que está de accôrdo com a questão sobre a formula (*d*) do § antecedente.

Exemplo.—*Quantas annuidades de 100$000 réis a pagar no fim de cada anno póde produzir a quantia de 345$797 réis, fazendo-se o desconto de 6 % composto por metade em cada semestre?*

Pela equação (*f*),

$$A''' = A'' = 345\$797,\ m = 1,\ \mu = 2 \text{ e } t = 0.06.$$

Achar-se-ha:

$$n = \frac{\log\left(\dfrac{1}{1-0.0609\times 3.45797}\right)}{2\times\log 1.03} = \frac{0.1026976}{0.0256744} = 4.$$

Aquella quantia produz 4 annuidades de 100$000; o que está de accôrdo com a questão do § 5.º

EXEMPLO.—*Por uma annuidade de renda de 200$000 que devia ter sido paga (rendas atrazadas) por metade no fim de cada semestre offerece-se a quantia de 889$705 réis, contando-se o juro annual de 6 %, mas compondo-se a terça parte de 4 em 4 mezes; quantas annuidades estão por pagar, isto é, quantos annos ha de atrazo?*

Aqui, conforme a equação (*e*),

$$K''' = 889705\,;\ m = 2\,;\ \mu = 3\,;\ t = 0{,}06$$

portanto,

$$n = \frac{\log\{1+0.0301495\times 8.89705\}}{3\times\log(1.02)} = \frac{0.1032020}{0.0258005} = 4\,.$$

São 4 annuidades; o que é conforme á questão do § 6º relativa á equação (*b*).

EXEMPLO.—*Collocando-se a annuidade de 1:000$000 réis por metade no principio de cada semestre, ao juro annual de 6 % composto de 6 em 6 mezes; em quantos annos completou a quantia de 24:501$339?*

Neste caso faz-se na equação (*d*):

$$Q''' = Q' = 24{:}501\$339\,;$$
$$\mu = m = 2\,;\ t = 0\ 06.$$

Portanto,

$$n = \frac{\log\left(1+\frac{49002678\times 0.02912621}{1000000}\right)}{2\times\log 1.03} = 15\,.$$

Completou aquella quantia em 15 annos; o que é confirmado pela questão do § 4.º

§ VIII.—TAXA DO JURO

Dando-se a quantia de uma annuidade ou renda, o tempo, e a sua somma ou presente valor, achar a taxa t de juros que se tem capitalizado ou devem capitalizar.

A determinação da taxa do juro é que dá lugar aos calculos mais laboriosos, por não haver um meio directo de se obter.

Annuidade collocada no principio do anno

Estabeleça-se a questão de saber *a quantos por cento se deve collocar no principio de cada anno a annuidade* — a —, *para que em* n *annos produza a quantia Q?* Em outros termos: *a annuidade* — a — *produziu a somma Q em* n *annos: qual foi a taxa do juro?*

Se na Taboa que dá os valores de S_n (annuidades no principio do anno, Taboa III), se achar $\frac{Q}{a}$ no alinhamento de n, vêr-se-ha logo a taxa do juro no alto da columna. Se $\frac{Q}{a}$ se não achar na Taboa, póde-se calcular t approximadamente, tomando em duas columnas consecutivas no alinhamento de n, duas quantidades que comprehendão $\frac{Q}{a}$. Sendo D a differença entre estas quantidades da Taboa, d a differença entre a menor e $\frac{Q}{a}$, e Δ a differença entre as taxas escriptas no alto das mesmas columnas, obtem-se (pelo methodo indicado para a fracção do anno, § 7°).

$$\frac{d}{D} \cdot \Delta,$$

que se deve addicionar ao juro mais baixo.

Exemplo.—*11 annuidades de 200$000 réis collocadas no principio de cada anno, produzirão 3:285$570; qual foi a taxa do juro?*

$$\frac{Q}{a} = \frac{3.285\$570}{200\$000} = 16,42785 .$$

Na Taboa respectiva (3ª) achão-se no alinhamento de 11 as quantidades 16.37071141 e 16.54137819 correspondentes ás taxas $6\,^1/_2$ e $6\,^2/_3$; portanto o juro buscado deve estar entre estas duas taxas.

A differença entre as annuidades da Taboa é 0.17066678; e a differença entre a annuidade mais baixa e a proposta (16.42785000—16,37071141), é 0,05713859. A differença das taxas é $^1/_6$.

Acharemos:

$$\frac{5713859}{17066678} \times \frac{1}{6} = 0,055799367$$

que se deve addicionar a 6,5 para ter approximadamente a taxa 6,555799 %.

A approximação é tanto maior quanto a differença entre as taxas das taboas fôr menor. Isto deve bastar na maioria dos casos: mas na falta de Taboas que comprehendão a taxa procurada, ou quando se exija grande exactidão, ha o methodo seguinte:

Pela equação (*b*) do § 1°, visto que $S_n = \frac{Q}{a}$, obtem-se:

$$r^{n+1} - \left(\frac{Q}{a}+1\right).t - 1 = 0 .$$

Pelo numero e somma das annuidades (convindo referir a somma á annuidade — 1 —, isto é, tomar $\frac{Q}{a}$), assume-se uma taxa de juro approximado. Que esta taxa seja τ, e $\rho = 1+\tau$. Seja x uma quantidade que se deva addicionar a τ, para que $\tau + x = t$, que é a taxa buscada: então, $r = \rho + x$; e a equação acima converte-se nesta:

$$(\rho+x)^{n+1} - \left(\frac{Q}{a}+1\right).(\tau+x) - 1 = 0 .$$

Desenvolvendo o binomio $(\rho+x)^{n+1}$, tomando sómente os dois primeiros termos do desenvolvimento, isto é, parando na primeira potencia de x (visto x nos termos seguintes ir em grande decrescimento), tem-se:

$$\rho^{n+1} + (n+1)\rho^n x - \left(\frac{Q}{a}+1\right)\tau - \left(\frac{Q}{a}+1\right)x - 1 = 0.$$

Donde se tira:

$$x = \frac{\left(\frac{Q}{a}+1\right)\tau - \left(\rho^{n+1}-1\right)}{\left(n+1\right)\rho^n - \left(\frac{Q}{a}+1\right)} . \qquad (a)$$

Para resolver a questão do precedente exemplo, seja:

$$\frac{Q}{a} = 16{,}42785 ; \quad \tau = 0{,}065 ; \quad \rho = 1.065 ; \quad n = 11 .$$

Tomando ρ^{n+1} e ρ^n na Tab. I.

Effectuando os calculos, tem-se:

$$x = \frac{17.42785 \times .065 - 1,12909624}{12 \times 1.99915140 - 17.42785};$$

$$x = 0.00056599.$$

Addicionando esta quantidade á taxa arbitrada, obtem-se 0,06556599. A taxa exacta é 0.06556 como se verifica pela equação (*a*) do § 1°

$$200\$000 \times \frac{(1.06556)^{12} - 1.06556}{0.06556} = 3:285\$570.$$

Se se deseja maior correcção, embora o calculo seja muito mais laborioso, pódem tomar-se os tres primeiros termos do desenvolvimento, isto é, parar na segunda potencia de x (1).

Assim,

$$\rho^{n+1} + (n+1)\rho^n x + (n+1).\frac{n}{2}.\rho^{n-1}x^2 - \left(\frac{Q}{a}+1\right).x - \left(\frac{Q}{a}+1\right)x - 1 = 0.$$

O que dá lugar á seguinte equação do 2° gráo:

$$x^2 + \frac{(n+1)\rho^n - \left(\frac{Q}{a}+1\right)}{(n+1).\frac{n}{2}\rho^{n-1}} \times x = \frac{\left(\frac{Q}{a}+1\right).x - \left(\rho^{n+1} - 1\right)}{(n+1).\frac{n}{2}\rho^{n-1}}.$$

Fazendo o coefficiente de x igual a F, e o segundo membro da equação igual a U, teremos:

$$x = -\frac{F}{2} + \sqrt{\left(\frac{F}{2}\right)^2 + U}. \qquad (a)\ bis$$

(1) Temos o binomio:

$$(\rho + x)^n = \rho^n + n.\rho^{n-1}x + n.\frac{n-1}{2}.\rho^{n-2}x^2 \ldots$$

Como no caso que nos occupa o valor de ρ pouco excede de — 1 —, e x é uma fracção decimal, a qual na avaliação da taxa assumida se procurará que não venha a exceder de millesimos, segue-se que os termos em que a potencia de x fôr superior á segunda são omissiveis: e tanto mais o serão, quanto mais approximada fôr a taxa assumida.

Effectuando os calculos sobre os valores acima dados, acharemos:

$$F = \frac{12 \times 1{,}99915140 - 17{,}42785}{12 \times \frac{11}{2} \times 1{,}87713747} = 0{,}0529656 \text{ ; e}$$

$$U = \frac{17{,}42785 \times 0{,}065 - 1{,}12909624}{12 \times \frac{11}{2} \times 1{,}87713747} = 0{,}000029978.$$

Portanto,

$$x = -0{,}0264828 + \sqrt{0{,}00070133 9 + 0{,}000029978} = 0{,}00056.$$

Obtendo-se por este modo a taxa

$$\tau + 0{,}00056 = 0{,}06556.$$

Renda ou annuidade paga no fim do anno.

Offerecendo-se na época do pagamento da ultima de n annuidades devidas e em atrazo (sendo cada annuidade a), a quantia K, pergunta-se a que taxa de juro corresponde?

O primeiro methodo do caso precedente é em tudo applicavel a este caso, tomando-se uma taboa que dê os valores de Σ_n (Tab IV): quer se ache nella a quantidade $\frac{K}{a}$, quer seja nella comprehendida entre duas quantidades correspondentes ao anno n em duas columnas consecutivas, tomando a proporção das differenças do juro ás differenças das quantidades.

Procuremos resolver esta questão pelo segundo methodo. Como $\frac{K}{a} = \Sigma_n$, teremos pela equação (a) do § 2.º

$$r^n - \frac{K}{a} \cdot t - 1 = 0. \qquad (b)$$

Assumindo uma taxa τ como no caso precedente, e fazendo $t = \tau + x$, $r = \rho + x$; e substituindo estes valores na equação acima (tomando só os dois primeiros termos do desenvolvimento do binomio $(\rho + x)^n$), obtem-se a final:

$$x = \frac{\frac{K}{a} \cdot \tau - \left(\rho^n - 1\right)}{n\rho^{n-1} - \left(\frac{K}{a}\right)}.$$

EXEMPLO.—*Sejão 10 annuidades de 200$000 réis cada uma pagaveis no fim do anno, mas em atrazo, pelas quaes se offerecem 2:648$571 réis: qual é o juro que se capitaliza?*

Aqui,

$$K = 2.648\$571\,;\quad \rho = 1.06\,;$$
$$\tau = 0.06\,;\quad n = 10\,;\quad a = 200000.$$

Portanto:

$$x = \frac{13.242855 \times 0.06 - 0,79084770}{10 \times 1.68947896 - 13,242855}.$$

$$x = 0.0010196$$

Addicionando esta quantidade a 0.06, acha-se $t = 0.0610196$. A taxa exacta é $6\,{}^1/_{10}$ por cento; havendo portanto um erro por excesso de 0.0000196.

Mas se em lugar dos dois, se tomarem os tres primeiros termos do desenvolvimento do binomio, se obterá para x um valor muito mais correcto.

Eis aqui neste caso a equação do 2° gráo resultante:

$$x^2 + \frac{n.\rho^{n-1} - \frac{K}{a}}{n.\frac{n-1}{2}.\rho^{n-2}} \times x = \frac{\frac{K}{a}.\tau - \left(\rho^n - 1\right)}{n.\frac{n-1}{2}.\rho^{n-2}}.$$

Fazendo o coeficiente de x igual a F, e o segundo membro da equação igual a U, ter-se-ha a mesma expressão da equação (*a*) *bis*; e attribuindo ás quantidades litteraes os valores do ultimo exemplo, resultará:

$$F = \frac{10 \times 1,68947896 - 13,242855}{45 \times 1,59384807} = 0,0509171.$$

$$U = \frac{0,7945713 - 0,79084770}{45 \times 1,59384807} = 0,0000519163.$$

Portanto,

$$x = -0,0254585 + \sqrt{0,0006481374 + 0,0000519163} = 0,001.$$

Fazendo a addição á taxa assumida, tem-se a taxa exacta 0,061.

Dado o presente valor A de um numero n de annuidades de renda pagaveis no fim de cada anno) sendo a o valor de cada uma, determinar a taxa t de juros porque forão descontadas.

Aqui tambem o primeiro methodo é applicavel buscando no alinhamento de n a quantidade $\frac{A}{a}$ n'uma taboa que dê os valores de P_n (Tab. V), ou a quantidade $\frac{a}{A}$ n'uma taboa que dê os valores de α (Tab. VI).

Mas analysemos pelo segundo methodo.

Da equação (*b*) do § 3º, fazendo $P_n = \frac{A}{a}$; deduz-se :

$$\frac{A}{a}t + r^{-n} - 1 = 0.$$

Arbitrando como anteriormente uma taxa τ de sorte que $t = \tau + x$ e $r = \rho + x$; substituindo estes valores na equação acima, tomando sómente os dois primeiros termos do desenvolvimento do binomio $(\rho + x)^{-n}$, achar-se-ha :

$$x = \frac{1 - \left(\rho^{-n} + \frac{A}{a}\tau\right)}{\frac{A}{a} - n\rho^{-(n+1)}} \qquad (c)$$

Exemplo.—*Sejão Rs. 1:465$068 presente valor de 10 annuidades de 200$000 cada uma: qual é a taxa do desconto?*

Arbitrando a taxa 6 por cento, teremos :

$$\frac{A}{a} = 7.32534; \quad n = 10; \quad \tau = 0.06; \quad \rho = 1.06$$

Na Tab. II achão-se os valores de ρ^{-n} e $\rho^{-(n+1)}$. Teremos pela equação acima :

$$x = \frac{1 - (0.55839478 + 0.4395204)}{7.32534 - 5.2678753}.$$

Logo,

$$x = 0{,}0010133.$$

Addicionando esta quantidade a 0,06, achar-se-ha $t = 0{,}0610133$. A taxa exacta é 0,061, havendo portanto um excesso de 0,0000133.

No caso de se tomarem os tres primeiros termos do desenvolvimento do binomio $(\rho+x)^{-n}$, resultará :

$$x^2+\frac{\frac{A}{a}-n\cdot\rho^{-(n+1)}}{n.\frac{n+1}{2}.\rho^{-(n+2)}}\times x=\frac{1-\left(\frac{A}{a}\cdot\tau+\rho^{-n}\right)}{n.\frac{n+1}{2}.\rho^{-(n+2)}}. \qquad (c)\ bis$$

Substituindo as quantidades litteraes pelos valores da presente questão, e tomando a formula da equação (*a*) *bis*, tem-se :

$$F=\frac{7.32534-10\times 0{,}52678753}{55\times 0{,}49696936}=0{,}0752731$$

$$U=\frac{1-\{7.32534\times 0{,}06+0{,}55839478\}}{55\times 0{,}49696936}=0{,}000076274\,.$$

Portanto,

$$x=-0{,}0376365+\sqrt{0{,}00141651 1+0{,}000076274}=0{,}001\,.$$

Fazendo a addição obtem-se $t = 0{,}061$, valor exacto.

As formulas da somma ou presente valor das annuidades relativas ao caso, servirão sempre de rectificação e prova final da taxa de juro achado por qualquer dos methodos.

Veja-se o § 13° da Secç. III.

No caso de annuidades adiantadas póde fazer-se $A = B-a$ para $n-1$ annuidades, como na *equação* (*c*) *bis* do § 7.°

Annuidades e juros em fracções

Methodos analogos são applicaveis aos casos de annuidades pagas por partes em correspondentes épocas do anno, e os juros compostos nas mesmas ou em differentes épocas.

Analysemos aqui sómente as formulas geraes do § 6° ; porque ellas abrangem todos os casos.

Seja dada a somma Q''' de $\frac{1}{m}$ da annuidade a paga m vezes por

anno no principio de cada periodo, e $\frac{1}{\mu}$ da taxa t de juro, composto μ vezes (*vide* equação (*a*) do § 6º).

Faremos :

$$\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}} = \rho+x. \qquad (c)\ tertio$$

E portanto,

$$\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{n\mu} = (\rho+x)^{mn};$$

visto que o expoente do primeiro membro $n\mu$ está por $\frac{\mu mn}{m}$.

$\rho = 1+\tau$, e τ é a taxa de juro arbitrada.

Desenvolvendo o binomio $(\rho+x)^{mn+1}$, e tomando só os dois primeiros termos, obteremos esta equação :

$$x = \frac{\left(\frac{mQ''}{a}+1\right)\times\tau-\left(\rho^{mn+1}-1\right)}{(mn+1)\times\rho^{mn}-\left(\frac{mQ''}{a}+1\right)}. \qquad (d)$$

Se em lugar dos dois se tomarem os tres primeiros termos, virá a seguinte equação do 2º gráo com um valor mais correcto para x :

$$x^2+\frac{(mn+1)\rho^{mn}-\left(\frac{mQ''}{a}+1\right)}{(mn+1)\cdot\frac{mn}{2}\cdot\rho^{mn-1}}\times x = \frac{\left(\frac{mQ''}{a}+1\right).\tau-\left(\rho^{mn+1}-1\right)}{(mn+1)\cdot\frac{mn}{2}\cdot\rho^{mn-1}}. \qquad (d)\ bis$$

Tendo-se a somma K''' da renda a pagavel cada $\frac{1}{m}$ parte no fim de cada periodo $\frac{1}{m}$ do anno, e $\frac{1}{\mu}$ da taxa do juro capitalizado μ vezes (*vide* a equação (*b*) do § 6º), virá a equação seguinte, dando-se a ρ a mesma significação precedente, e tomando só os dois primeiros termos do desenvolvimento do binomio $(\rho+x)^{mn}$:

$$x = \frac{\frac{mK'''}{a}\tau-\left(\rho^{mn}-1\right)}{mn\rho^{mn-1}-\frac{mK'''}{a}}. \qquad (e)$$

Se em lugar dos dois, tomarmos os tres primeiros termos do desenvolvimento, teremos:

$$x^2+\frac{mn.\rho^{mn-1}-\frac{mK'''}{a}}{mn\cdot\frac{mn-1}{2}\cdot\rho^{mn-2}}\times x=\frac{\frac{mK'''}{a}\cdot\tau-\left(\rho^{mn}-1\right)}{mn\cdot\frac{mn-1}{2}\cdot\rho^{mn-2}} \qquad (e)\ bis$$

Tendo-se o presente valor A''' da renda a receber $\frac{1}{m}$ parte no fim de cada periodo $\frac{1}{m}$ do anno, e $\frac{1}{\mu}$ da taxa do juro capitalizado μ vezes (*vide* a equação (*c*) do § 6º), dando a ρ a mesma significação dos dois casos precedentes, e tomando só os dois primeiros termos do desenvolvimento do binomio $(\rho+x)^{-mn}$, ter-se-ha a equação:

$$x=\frac{1-\left\{\rho^{-mn}+\frac{mA'''}{a}\tau\right\}}{\frac{mA'''}{a}-mn\rho^{(mn+1)}}. \qquad (f)$$

Porém se quizermos maior approximação tomando os tres primeiros termos do desenvolvimento do binomio, resultará a seguinte equação:

$$x^2+\frac{\frac{mA'''}{a}-mn.\rho^{-(mn+1)}}{mn\cdot\frac{mn+1}{2}\cdot\rho^{-(mn+2)}}\times x=\frac{1-\left\{\frac{mA'''}{a}\cdot\tau+\rho^{-mn}\right\}}{mn\cdot\frac{mn+1}{2}\cdot\rho^{-(mn+2)}} \qquad (f)\ bis$$

Se a annuidade fôr adiantada, isto é, que seja B''' o presente valor de n annuidades a collocar $\frac{1}{m}$ parte no principio de cada periodo $\frac{1}{m}$ do anno, e $\frac{1}{\mu}$ da taxa do desconto capitalizavel μ vezes no anno, teremos pela equação (*d*) do § 6º, empregando $\rho+x$ com a significação dos tres casos precedentes, e tomando sómente os dois primeiros termos do desenvolvimento do binomio $(\rho+x)^{-(mn-1)}$:

$$x = \frac{\rho - \left(\rho^{-(mn-1)} + \frac{mB'''}{a} \cdot \tau\right)}{\frac{mB'''}{a} - \left\{(mn-1)\rho^{-mn} + 1\right\}}. \qquad (g)$$

Se em lugar dos dois, tomarmos os tres primeiros termos do desenvolvimento, obteremos a seguinte equação do 2° gráo:

$$x^2 + \frac{\frac{mB''}{a} - \left\{(mn-1)\rho^{-mn} + 1\right\}}{(mn-1).\frac{mn}{2}\rho^{-(mn+1)}} x = \frac{\rho - \left(\rho^{-(mn-1)} + \frac{mB'''}{a}\tau\right)}{(mn-1)\cdot\frac{mn}{2}\cdot\rho^{-(mn+1)}}. \qquad (g)\ bis$$

Nestas oito equações, depois de determinado o valor de x, tem-se afinal (equação (*c*) *tertio*):

$$t = \mu \times \left\{(\rho + x)^{\frac{m}{\mu}} - 1\right\} \qquad (h)$$

Com estas equações se obtem x e por consequencia t approximadamente (e muito approximadamente com as equações do 2° gráo) em todos os casos, attribuindo a μ e m os valores que lhes forem relativos pela questão a resolver.

E' preciso observar que quando $m = \mu$, isto é, quando a annuidade se divide em tantas partes como o juro, e as épocas de pagamento coincidem com as da capitalização, a equação (*c*) *tertio*, neste caso torna-se:

$$1 + \frac{t}{\mu} = \rho + x; \qquad (h)\ bis$$

e portanto, é a fracção do juro correspondente á fracção do anno que devemos procurar.

Exemplo.—*Sabemos pela formula* (*d*) *do* § *6°, que 722$677 réis é o valor actual de 4 annuidades de 200$000 réis a pagar por metade no principio de cada semestre, fazendo-se os descontos de 6 % composto de 4 em 4 mezes. Finjamos que ignoramos a taxa, e procuremol-a pela equação* (*g*) *bis.*

Com os valores dados, a inspecção da Tab. V induz a suppôr

que o juro annual deve ser pouco mais ou menos de 6 %; e como é descontado por semestre, façamos $\rho = 1.03$; demais,

$$B''' = 722677;\ m = 2;\ \mu = 3 \text{ e } n = 4.$$

Teremos pela equação (*g*) *bis*:

$$x^2 + \frac{\frac{2\times 722677}{200000} - \left(7\times(1.03)^{-8}+1\right)}{7\times\frac{8}{2}\times(1.03)^{-9}}\times x = \frac{1.03-\left((1.03)^{-7}+\frac{2\times 722677}{200000}\times 0.03\right)}{7\times\frac{8}{2}\times(1.03)^{-9}}.$$

De que resulta (equação (*a*) *bis*):

$$x = -0{,}01633087 + \sqrt{0.0002716083} = 0.00014967.$$

Obtendo-se finalmente pela equação (*h*) a taxa annual de 6 %.

Exemplo. — *Para fazer mais uma applicação das equações do 2º gráo, supponhamos que uma Empresa tenha contrahido um emprestimo de 120:000$000 réis sendo parte em letras hypothecarias, ao juro annual de 7 1/2 por cento, para ser amortizado em 14 annos mediante a annuidade de Rs. 14:470$900 (incluindo juro, amortização e uma porcentagem para despesas de administração), paga por semestres vencidos. Negociadas as letras, produziu tudo apenas 100:200$000 réis: pergunta-se qual é o juro que a Empresa realmente paga por este emprestimo?*

São 28 pagamentos de 7:235$450. A relação $\frac{7235450}{100200000} = 0.07221008$ aproxima-se muito da quantidade da Tab. VI á taxa 5 3/4: o que nos suggere o assumir esta taxa, fazendo $\rho = 1.0575$ e $\tau = 0.0575$.

Attribuão-se a F e U, da equação (*a*) *bis*, os valores indicados pela equação (*f*) *bis*; e nesta tem-se pela questão:

$\frac{mA'''}{a} = \frac{2\times 100200000}{14470900} = 13.8484821262$; $m = 2$; $n = 14$. E tambem:

$\rho^{-28} = 0.209001532549$; $\rho^{-29} = 0.197637383025$; $\rho^{-30} = 0.186891142341$.

Nestes termos,

$$F = \frac{13.8484821262 - 28\times\frac{1}{(1.0575)^{29}}}{406\times\frac{1}{(1.0575)^{30}}} = 0.1095792838772\ldots$$

$$U = \frac{1-\left\{13.8484821262\times 0.0575+\frac{1}{(1.0575)^{28}}\right\}}{406\times\frac{1}{(1.0575)^{30}}} = -0.000069707536875.$$

De que resulta:

$$x = -0{,}05478964\ldots + \sqrt{0{,}003001904863 76\ldots - 0{,}000069707536875\ldots}$$
$$= -0{,}00063987\ldots$$

Portanto, visto que $\mu = m = 2$, tem-se pela equação (*h*) *bis*:

$$\frac{t}{2} = 0.0575 - 0.00063987\ldots = 0.0568601\ldots$$

Taxa exacta até a 7ª decimal, como prova o ser necessaria a taxa de $5\frac{68601026}{100000000}$ % (parando na 10ª decimal), para satisfazer á equação (*c*) do § 4º (note-se que $(1.0568601026)^{-28} = 0.212573885153$):

$$100:200\$000 = 7.235\$450 \times \frac{1-(1.0568601026)^{-23}}{0.0568601026}.$$

Pela solução acima o juro annual é de $11\frac{372}{1000}$ por cento; mas como este juro annual é pago por metade em cada semestre, o que determina a sua capitalização semestral, elle torna-se realmente no valor indicado pela formula (*g*) *bis* do § 6º da Secç. I; isto é:

$$(1.05686)^2 - 1 = 0.11695 = 11\frac{695}{1000} \text{ por cento } (^1).$$

Veja-se tambem o methodo exposto no § 13º da Secç. III.

(1) Esta questão foi dirigida a um grande estabelecimento de credito por um mutuario, que pretendia converter uma c/c. que tinha em outro estabelecimento com juros de 10 % no emprestimo hypothecario amortizavel como acima fica dito. Como as letras hypothecarias tinhão grande desconto, era preciso indagar se a conversão traria vantagem ou desvantagem, apezar de serem os juros do emprestimo a 7 ½: era preciso inquirir que juro resultava da operação hypothecaria para o comparar com o de 10 % da c/c. O grande estabelecimento de credito, sabendo que as letras hypothecarias tinhão o desconto de 24 ½ por cento, repartiu estes 24 ½ pelos 14 annos do prazo da amortização, e achou para cada um 1 ¾ que addicionou a 7 ½, e sem mais ceremonia respondeu ao mutuario que o juro annual resultante erão 9 ¼ por cento!!!... O mutuario, apezar de advertido, deixou-se fascinar pelo prestigio do estabelecimento, e fez a conversão que lhe trazia um prejuizo de perto de 30 contos!

Factos de tal gravidade não se commentão: elles impõem a instante necessidade de combatermos a vergonhosa desidia que nos torna odioso qualquer trabalho de analyse, e sobretudo, de combatermos o fatal sestro de tudo decidirmos sem sciencia nem consciencia, imperdoavelmente descuidosos dos funestos resultados. Essa desidia e esse sestro, fazendo adoptar em vez do calculo alvitres disparatados, occasionou o desastre do *Montepio Geral* que trouxe a desolação a tantas familias (veja-se o meu *Juizo Critico sobre o Montepio Geral*, publicado em folheto em 1880). Hoje effectuão a desaggregação do mesmo *Montepio* de um modo iniquo, calcando aos pés todas as regras do calculo e do direito! Foi esse abominavel sestro que fez apparecer em 1881 a organização viciosa e disparatada de um montepio annexo á Sociedade *Previdencia*. Protestando contra mais esse attentado, tive a fortuna de fazer com que desistissem dessa pretenção que no futuro havia de occasionar um desastre tão formidavel como o do *Montepio Geral* (vejão-se os meus artigos no *Jornal do Commercio* desde 30 de Julho a 6 de Agosto de 1881, que brevemente publicarei em folheto).

§ IX.—CALCULO DO VALOR DE CADA PRESTAÇÃO DA ANNUIDADE

Resta examinar o caso em que sendo dada a somma ou presente valor de uma annuidade por certo numero de annos com os seus juros, seja preciso determinar a annuidade. Em outros termos: *que annuidade é precisa para produzir determinada quantia, dado o tempo e o juro; e tambem, que annuidade póde produzir um determinado presente valor, dado o tempo e o juro?*

As equações dos §§ 1 a 6 da presente Secção resolvem estas questões em todos os casos.

Basta aqui determinar, como exemplo, a annuidade a collocada ou a collocar no principio do anno, ou a renda devida no fim do anno; visto que as ditas equações resolvem directamente todos os casos; e tendo nós, além disto, de tratar mais largamente, sob o titulo *amortização*, da annuidade que póde produzir um dado capital.

Seja dada a quantia Q que uma certa annuidade a produziu em n annos á taxa de juro t, collocada no principio de cada anno: determinar a?

Da equação (a) do § 1º—, deduz-se:

$$a = \frac{Q(r-1)}{r^{n+1}-r}. \qquad (a)$$

Multiplica-se a quantia dada pelo juro annual de 1; depois, da potencia de — 1 com o seu juro de um anno — indicada pelo numero de annos mais um subtrahe-se — 1 com o seu juro de um anno —; o quociente do primeiro resultado pelo segundo será a annuidade paga no principio de cada anno.

Nas taboas acha-se $S_n = \frac{r^{n+1}-r}{r-1}$; portanto basta dividir a quantia proposta pela quantidade da Taboa (3ª) no alinhamento de n, para ter a annuidade; isto é:

$$a = \frac{Q}{S_n}. \qquad (b)$$

Exemplo.—*Dada a quantia de 14:371$560 que perfizerão 10 annuidades collocadas no principio de cada anno a 6 ½ % annual, teremos:*

$$a = \frac{14:371\$560 \times 0{,}065}{0.9341514} = 1:000\$000.$$

Offerecendo-se a quantia K por n annos de renda a, exigivel no fim de cada anno, em atrazo com os seus juros á taxa t compostos ao anno, qual é o valor de a?

Da equação (a) do § 2°, deduz-se:

$$a = \frac{K\,(r-1)}{r^n-1} \qquad (c)$$

Portanto, para ter o valor annual da renda, que sendo paga no fim de cada anno produz n'um prazo dado certa quantia, *multiplica-se a quantia dada pelo juro annual de 1; depois subtrahe-se — 1 — da somma de 1 mais o seu juro de um anno elevada á potencia indicada pelo numero de annos* (Tab. I); *por fim, divide-se o primeiro resultado pelo segundo.*

Tambem, como antecedentemente, com uma taboa que dê os valores de Σ_n (4ª) ter-se-ha:

$$a = \frac{K}{\Sigma_n} \qquad (d)$$

Finalmente seja dado o presente valor A de n annuidades de renda exigiveis no fim de cada anno, descontando-se o juro á taxa t por anno, qual é o valor a da renda? Em outros termos: a quantia A que renda a póde produzir em n annos com o juro t?

Da equação (a) do § 3°, se deduz:

$$a = \frac{A(r-1)}{1-r^{-n}}. \qquad (e)$$

E tambem do mesmo modo que nos casos antecedentes, havendo uma taboa que dê os valores de P_n (5ª), ter-se-ha:

$$a = \frac{A}{P_n} \qquad (f)$$

Exemplo.—*Que renda* — a — *deve produzir em 10 annos a quantia de Rs. 7:721$735 com os juros de 5 por cento compostos ao anno?*

Na Taboa II acha-se a quantidade $(1.05)^{-10}$; portanto,

$$a = \frac{7721735 \times 0.05}{1-0{,}61391325} = 1{:}000\$000.$$

A precedente equação (e) sendo dividida por A, tem-se:

$$\frac{a}{A} = \frac{t}{1-r^{-n}}. \qquad (g)$$

Que mostra quantos por cento deve produzir o capital no numero n de annos, e á taxa t de juro, ajustados.

No exemplo acima, se em lugar de perguntarmos que annuidade produzem 7:721$735 em 10 annos a 5 %, perguntassemos de quantos por cento do capital a este juro deve ser a annuidade, teriamos:

$$\frac{0.05}{1-0.61391325} = 0,129504574.$$

Com effeito, $12\frac{9504574}{10000000}$ por cento sobre Rs. 7:721$735 é 1:000$000.

A equação (g) fornece as quantidades da Tab. VI, attribuindo a n os valores successivos de 1, 2, 3, etc.— E' o valor da annuidade precisa para amortizar o capital — 1 — mutuado, como se verá nos §§ 2° e 15° da Secç. III. Basta portanto multiplicar o capital pela quantidade tabular, para ter a annuidade que elle póde produzir no tempo dado.

No caso do presente valor de annuidades adiantadas, veja-se o § 7° desta Secção, equação (c) *bis*.

Em todos os casos de annuidades fraccionadas, e juros a compôr em épocas differentes das épocas de pagamento das prestações, o valor de a deduz-se do mesmo modo das respectivas equações já apresentadas, sem ser necessario insistir mais nesta materia.

Veja-se a NOTA (d).

§ X.—DURAÇÃO COMMUM PARA ANNUIDADES DE DURAÇÕES DIFFERENTES.

Póde suscitar-se a questão de saber qual é a duração commum de duas ou mais annuidades de durações differentes, para que o pagamento dellas juntas nesse prazo commum seja equivalente á somma dos pagamentos de cada uma em seu prazo respectivo?

Sejão duas annuidades, uma da quantia a e outra da quantia b: seja r a unidade mais o seu juro annual, e os prazos, n da primeira, e v da segunda: trata-se de saber qual é o prazo commum x.

Teremos esta equação:

$$(a+b)\frac{1-r^{-x}}{r-1} = a\frac{1-r^{-n}}{r-1} + b\frac{1-r^{-v}}{r-1}.$$

Donde se tira:

$$x = \frac{\log\left(\frac{a+b}{ar^{-n}+br^{-v}}\right)}{\log r}.$$

Para ter, portanto, o prazo commum equivalente, *faz-se o logarithmo da somma das annuidades* (tomando um pagamento periodico de cada uma); *depois faz-se o logarithmo da somma das mesmas annuidades descontadas, cada uma como se fosse um capital, pelos respectivos prazos, e subtrahe-se do primeiro logarithmo; por fim, divide-se a differença pelo logarithmo de 1 com o seu juro de um anno.*

Se as annuidades forem do mesmo valor, isto é, se $a = b$, tem-se mais simplesmente:

$$x = \frac{\log\left(\frac{2}{r^{-n}+r^{-v}}\right)}{\log r}.$$

Se x fôr fraccionario, veja-se adiante, Secç. III §§ 4° e 8°, como deve ser avaliado.

Exemplo.—*Sejão duas rendas de 1:000$000 annuaes, uma por 4 annos e outra por 7: sendo o desconto á taxa de 6 por cento, durante que prazo equivalente commum devem ellas ser pagas juntas?*

$$x = \frac{\log\left(\frac{2}{0.79209366+0.66505711}\right)}{\log(1.06)} = \frac{0.1375255}{0.0253059}.$$

Portanto, $x = 5\frac{43452317}{100000000}$, prazo equivalente para o pagamento simultaneo das duas rendas; isto é, 5 annos e 158 dias, *conta redonda.*

Póde-se assim achar um prazo equivalente para rendas differentes a prazos diversos, consistindo todo o mecanismo em *reduzir ao presente valor todas as rendas, e igualal-o ao presente valor das mesmas rendas a receber simultaneamente durante o periodo equivalente buscado, x;* como no exemplo acima; onde (Tab. V):

Presente valor de uma renda de 1:000$000 por 4 annos	= 3:465$106
Dito por 7 annos.....	= 5:582$381
Somma.	= 9:047$487

Presente valor de uma renda de 2:000$000 durante 5,4352317 annos..... = 9:047$487

Compare-se com o que se disse sobre o vencimento commum de quantias a receber (Secç. I § 7°).

§ XI —PENSÕES OU RENDAS DIFFERIDAS E ANTECIPADAS.

Na acquisição de pensão ou renda immediata, a primeira cobrança tem lugar no fim de um espaço de tempo igual ao intervallo entre dois pagamentos ulteriores consecutivos (§§ 3° e seguintes desta Secç.).

Quando porém uma pensão ou renda só começa a ser exigivel depois de passar um espaço de tempo (dilação) maior do que um dos intervallos entre dois pagamentos consecutivos, diz-se que esta pensão ou renda é *differida.*

A *nua propriedade* é uma renda differida pelo tempo certo ou provavel que decorre até que o proprietario tenha de entrar na posse plena da propriedade.

O espaço de tempo desde a acquisição até o primeiro pagamento, tambem póde ser menor do que um dos intervallos dos pagamentos consecutivos posteriores. Neste caso será uma *pensão antecipada.*

Para a unidade de tempo—um anno,—seja v a dilação; v póde ser um numero inteiro ou fraccionario, ou uma fracção propria.

Entende-se sempre que o primeiro pagamento da renda *differida por* v *annos*, deve ser realizado no fim do anno v. E' preciso aqui observar que deste modo, a renda é adiantada (veja-se a NOTA do § 3°): isto é, *exigivel no principio de cada anno do goso.* Se uma renda annual immediata só é exigivel no fim do primeiro anno, não se póde dizer que seja differida por um anno. A renda não adiantada *differida por um anno* quer dizer que no fim do primeiro anno é que *começa a posse da renda*, cujo primeiro pagamento deverá effectuar-se no fim do segundo anno: e assim para qualquer dilação. Portanto, segundo a interpretação vulgar, deve entender-se que *a renda differida é exigivel no principio de cada anno da posse.*

Renda differida.—Feita esta observação, vamos determinar o presente valor de uma renda por n annos, cujo pagamento deve começar daqui a v annos, isto é, differida por v annos.

Aqui,

a = valor do pagamento annual da renda.

v = numero de annos da dilação.

n = numero de annuidades de renda.
t = taxa do desconto por anno.
$r = 1+t$.

O presente valor do primeiro pagamento é $\frac{1}{r^{v}}a$.

Dito do segundo..... $\frac{1}{r^{v+1}}a$.

Dito do ultimo..... $\frac{1}{r^{v+n-1}}a$.

Sommando estes valores pelo processo já conhecido, será o presente valor da *renda differida*:

$$a\times\left(\frac{\frac{1}{r^{v-1}}-\frac{1}{r^{v+n-1}}}{t}\right) \qquad (a)$$

Que é o mesmo que

$$a\times\frac{1}{r^{v-1}}\times\frac{1-r^{-n}}{t}. \qquad (a)\ bis$$

O que mostra que o presente valor da renda differida iguala o valor da mesma renda immediata descontado pelos annos porque é differida menos um.

E tambem, visto que

$$\frac{\frac{1}{r^{v-1}}-\frac{1}{r^{v+n-1}}}{t}=\frac{1-r^{-(n+v-1)}}{t}-\frac{1-r^{-(v-1)}}{t},$$

tem-se

$$P_{n+v-1}-P_{v-1}, \qquad (b)$$

que com as taboas que deem os valores de P_N (Tab. V) para a taxa t, a diffe rença entre a quantidade do alinhamento do anno $(n+v-1)$, que é a somma dos annos de goso e os da dilação menos 1, e a do alinhamento do anno $(v-1)$, que é a dilação menos 1, será o multiplicador de a (pagamento annual da renda).

Exemplo.—*Qual é o presente valor de uma renda de 1:000$000 réis por 5 annos, que deverá começar daqui a 4, fazendo-se os descontos a 4 %?*

Aqui,

$$n = 5\,;\quad v = 4\,;\quad t = 0.04\,;$$
$$\text{(Tab. II)}\quad r^{-(v-1)} = 0.88899636\,;$$
$$\text{»}\quad r^{-(v+n-1)} = 0.73069021.$$

Temos, segundo a formula (*a*):

$$1000000 \times \frac{0.88899636 - 0.73069021}{0.04} = \text{Rs. } 3.957\$654.$$

E pelas Taboas de annuidades:

O presente valor (Tab. V) de 1.000000 annual por 8 annos a 4 %	= 6:732$745
Dito da mesma renda por 3 annos.....	= 2:775$091
Differença.	= 3:957$654

Resultado igual.

Pelo que fica dito, facilmente se determinará o presente valor da renda differida por v annos a pagar repartidamente m vezes por anno, durante n annos, e o desconto composto nas mesmas épocas. A dilação conterá mv periodos de pagamento, que será o tempo de desconto do primeiro, sendo o do ultimo $\{m(n+v)-1\}$. Recordando a doutrina do § 4°, se deduzirá a formula:

$$\frac{a}{m} \times \frac{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-(mv-1)} - \left(1+\frac{t}{m}\right)^{-\{m(n+v)-1\}}}{\left(\frac{t}{m}\right)}. \qquad (c)$$

Exemplo:—*Seja a renda de 1:000$000 réis a pagar por metade em cada semestre durante 8 annos differida por 4 ½. Desconto annual 6 %, tambem composto aos semestres. Qual é o presente valor?*

Nesta hypothese, na formula acima, $m = 2$; $n = 8$; $v = 4\,{}^1/_2$; $t = 0.06$.

Resulta (tomando na tab. II os valores indicados):

$$500000 \times \frac{0.78940923 - 0.49193374}{0.03} = \text{Rs. } 4:957\$925.$$

Com Taboas de annuidades que deem os valores para a taxa $\frac{t}{m}$, póde-se achar pelo processo da equação (*b*) um multiplicador de $\frac{a}{m}$, desta fórma :

$$\frac{1-\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-\{m(n+\nu)-1\}}}{\left(\frac{t}{m}\right)}-\frac{1-\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-(m\nu-1)}}{\left(\frac{t}{m}\right)}.$$

isto é :

$$P_{m(n+\nu)-1}-P_{m\nu-1}. \qquad (d)$$

Substituindo as quantidades litteraes pelos seus valores, teremos :

$$\frac{1-(1.03)^{-24}}{0.03}-\frac{1-(1.03)^{-8}}{0.03}.$$

Tomando na Taboa V o presente valor de 24 e de 8 annuidades na columna — 3 % —, obtem-se :

$$(16.93554-7,01969)\times 500\$000 = \text{Rs. } 4:957\$925$$

que é o mesmo resultado.

Para o presente valor de n annuidades de renda a a pagar repartidamente m vezes por anno no principio de cada periodo, sendo o desconto a juro composto ao anno, differida por ν annos, teremos que o desconto de cada pagamento $\frac{a}{m}$ será :

$$\text{O primeiro } \frac{1}{\left(r^{\frac{1}{m}}\right)^{m\nu}}=\frac{1}{r^{\nu}};$$

$$\text{e o ultimo } \frac{1}{r^{\nu+n-\frac{1}{m}}}.$$

Fazendo a somma da serie pelos methodos já expostos, teremos :

$$\frac{r^{-\left(\nu-\frac{1}{m}\right)}-r^{-\left(\nu+n-\frac{1}{m}\right)}}{r^{\frac{1}{m}}-1}=\frac{r^{-\nu}-r^{-(\nu+n)}}{1-r^{-\frac{1}{m}}}.$$

Escolher-se-ha a expressão do primeiro ou do segundo membro desta equação, segundo fôr mais conveniente em ordem a evitar expoentes fraccionarios no numerador.

Exemplo.—*Sejão 10 annuidades de 1:000$000 réis cada uma a pagar por metade em cada semestre, com o desconto á taxa de 6 % composto ao anno.*

1.º Qual é o valor actual, sendo differida por 6 ½ annos?

Convém neste caso a expressão do primeiro membro da equação; sendo $a = 1000000$; $v = 6\,{}^1/_2$; $m = 2$; $n = 10$; $r = 1.06$.

Tomando na Tab. II e 2º Supplemento á Tab. I os valores indicados, tem-se:

$$500000 \times \frac{(1.06)^{-6} - (1.06)^{-16}}{(1.06)^{\frac{1}{2}} - 1} = \text{Rs. } 5:265\$267.$$

2.º Qual é o valor actual, sendo differida por 6 annos?

Neste caso convém a expressão do segundo membro; sendo $v = 6$, e os outros valores como acima.

$$500000 \times \frac{(1.06)^{-6} - (1.06)^{-16}}{1 - (1.06)^{-\frac{1}{2}}} = \text{Rs. } 5:420\$923.$$

Tambem, como no caso antecedente, e segundo a doutrina do § 4º, se podem obter iguaes resultados por meio da Taboa V á taxa t de desconto.

Pelo primeiro membro da equação, tem-se:

$$\left(P_{v+n-\frac{1}{m}} - P_{v-\frac{1}{m}}\right) \times \frac{t}{r^{\frac{1}{m}} - 1};$$

e pelo segundo:

$$\left(P_{v+n} - P_v\right) \times \frac{t}{1 - r^{-\frac{1}{m}}};$$

preferindo-se uma ou outra expressão conforme fôr mais conveniente.

O presente valor da renda por n annos a pagar por inteiro em cada anno, mas compondo $\frac{1}{m}$ da taxa t do desconto m vezes por anno

$\left(\left\{1+\frac{t}{m}\right\}^{m}\right)$, differida por ν annos, determina-se como nos casos precedentes (sendo o desconto do primeiro pagamento pelo tempo da dilação ν, e o do ultimo $\{\nu+n-1\}$).

Temos a formula:

$$a\times\frac{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-m(\nu-1)}-\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-m(\nu+n-1)}}{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m}-1}. \qquad (e)$$

E tambem por meio da Tab. V, de annuidades descontadas á taxa $\frac{t}{m}$, se tem o seguinte equivalente multiplicador de a:

$$\{P_{m(n+\nu-1)}-P_{m(\nu-1)}\}\times\frac{\left(\frac{t}{m}\right)}{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m}-1}. \qquad (f)$$

Exemplo.—*Qual é o presente valor da renda de 1:000$000 réis a pagar annualmente por inteiro durante 8 annos, com o desconto á taxa de 6 % composto por metade em cada semestre, differida por 5 annos?*

Fazendo na formula (e), $a = 1000000$; $m = 2$; $n = 8$; $\nu = 5$; $t = 0.06$, acha-se (com as Taboas II e I):

$$1000000\times\frac{(1.03)^{-8}-(1.03)^{-24}}{1.06)^{2}-1} = 4:884\$655.$$

Tomando a Tab. V na columna $\frac{t}{m} = 0.03$ e nos alinhamentos de $m(n+\nu-1) = 24$ e $m(\nu-1) = 8$, obtem-se tambem por est'outro modo:

$$1:000\$000\times\left\{16.93554210-7.01969219\right\}\times\frac{0.03}{0,0609} = \text{Rs. } 4:884\$655.$$

Resultado igual.

Resta determinar o presente valor de uma renda a pagar repartidamente m vezes por anno, differida por ν annos, e o desconto á taxa annual t, capitalizando-se $\frac{t}{\mu}$ μ vezes por anno; — 1 — mais a taxa

porque se desconta cada pagamento será $\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}$. Como os pagamentos de renda se fazem m vezes por anno, o tempo porque ella é differida é igual a $m\nu$ periodos de pagamento: sendo este o tempo de desconto do primeiro; e do ultimo: $\left\{m(\nu+n)-1\right\}$.

Nestes termos, e segundo a demonstração que precede as expressões dos valores de A''' e B''' do § 6°, obtem-se o valor actual da annuidade differida:

$$\frac{a}{m}\times\frac{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\mu\left(\nu-\frac{1}{m}\right)}-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\mu\left(\nu+n-\frac{1}{m}\right)}}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}-1}; \qquad (g)$$

e tambem:

$$\frac{a}{m}\times\frac{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\mu\nu}-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\mu(\nu+n)}}{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\frac{\mu}{m}}}. \qquad (g)\ bis$$

Preferindo-se uma ou outra formula, como se disse precedentemente, em ordem a evitar quanto possivel expoentes fraccionarios no numerador.

Indiquemos agora multiplicadores de $\frac{a}{m}$ obtidos por meio da Tab. V (de annuidades descontadas á taxa $\frac{t}{\mu}$).

Segundo as demonstrações do § 6°, acharemos (resultante da formula acima (g)):

$$\left\{P_{\mu\left(n+\nu-\frac{1}{m}\right)}-P_{\mu\left(\nu-\frac{1}{m}\right)}\right\}\times\frac{\left(\frac{t}{\mu}\right)}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}-1}; \qquad (h)$$

e tambem (resultante da formula (g) *bis*):

$$\left\{P_{\mu(\nu+n)}-P_{\mu\nu}\right\}\times\frac{\left(\frac{t}{\mu}\right)}{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\frac{\mu}{m}}} \qquad (h)\ bis$$

Exemplo.—*Qual é o presente valor da renda de 200$000 réis por 2 annos a pagar por metade em cada semestre, differida por 2 ½ annos (5 semestres), e, fazendo-se o desconto á taxa de 6 % annual composto por ⅓ de 4 em 4 mezes?*

$$\text{Aqui, } m = 2;\ \mu = 3;$$
$$\nu = 2.5;\ n = 2;\ t = 0.06.$$

Convem-nos empregar a formula (g) visto que pela proposta, $\mu\left(\nu-\frac{1}{m}\right) = 6$, e $\mu\left(\nu+n-\frac{1}{m}\right) = 12$ (numeros inteiros).

Tomando na Tab. II os valores indicados na formula, acharemos :

$$100000\times\frac{\left(1+\frac{0.06}{3}\right)^{-6}-\left(1+\frac{0.06}{3}\right)^{-12}}{\left(1+\frac{0.06}{3}\right)^{\frac{3}{2}}-1} = 100000\times\frac{0.88797138-0.78849318}{0.0301495}$$
$$= 329\$950.$$

Com effeito, na prova que segue a formula do valor de A''' no § 6º, achou-se :

Valor das 4 annuidades em 8 pagamentos.....	701$526
Subtrahindo o presente valor das duas primeiras annuidades (($m\nu$—1) semestres).....	371$576
Differença	329$950

que é o presente valor das duas ultimas annuidades, e iguala o resultado da formula acima, como deve ser.

Empregando a Taboa V, columna — $\frac{t}{\mu} = 2\ \%$ — nos alinhamentos de $\mu\left(n+\nu-\frac{1}{m}\right) = 12$ e $\mu\left(\nu-\frac{1}{m}\right) = 6$, obtem-se ainda pela formula (h) :

$$100000\times(10.57534122-5.60143089)\times\frac{0.02}{0.0301495} = \text{Rs. } 329\$950.$$

Se a dilação fosse de dois annos conviria empregar a formula (g) *bis*, ou (h) *bis*.

——

OBSERVAÇÃO.—Em todos os casos de renda differida, póde-se tomar o valor actual da renda *immediata não adiantada* descontado pelo numero de annos da dilação menos um; ou o valor actual da renda *immediata adiantada* (NOTA do § 3º), descontado pelo numero de annos da dilação. Deste modo, sendo δ a unidade mais a taxa porque se desconta cada pagamento, tem-se:

$$a \times \frac{1}{\delta^{\nu-1}} \times \frac{1-\delta^{-n}}{\delta-1} = a \times \frac{1}{\delta^{\nu}} \times \frac{\delta-\delta^{-(n-1)}}{\delta-1} \qquad (i)$$

E' visivel que o segundo membro é o resultado do primeiro simultaneamente multiplicado e dividido por δ, o que não lhe altera o valor.

Sendo $a = 1$, tomando as quantidades tabulares P_n (Tab. V) para o desconto δ, obteremos:

$$\frac{1}{\delta^{\nu-1}} \times P_n = \frac{1}{\delta^{\nu}} \times (1+P_{n-1}). \qquad (k)$$

Interpretando δ e P conforme as indicações dos casos precedentes.

Segundo a definição da renda differida, ν deve ser maior do que um intervallo entre dois pagamentos consecutivos da renda: se fôr igual, virá a renda immediata (§§ 3º a 6º); se fôr menor, resultará o caso seguinte:

Renda antecipada.—Representando ν, relativamente á unidade—1 anno—, um espaço de tempo menor que um intervallo entre dois pagamentos consecutivos, as formulas precedentes (a), (c), (e) e (g) darão os valores requeridos segundo os casos; bastando aqui considerar as formulas (g) e (g) *bis* (que abrangem todos os casos) de renda exigivel m vezes por anno e o juro capitalizavel μ vezes, para fazer algumas observações. Como neste caso, ν é uma fracção de anno menor que $\frac{1}{m}$, a formula (g) póde modificar-se assim:

$$\frac{a}{m} \times \frac{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\mu\left(\frac{1}{m}-\nu\right)} - \left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\mu\left(n+\nu-\frac{1}{m}\right)}}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}-1}; \qquad (l)$$

e tambem

$$\frac{a}{m}\times\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\mu\left(\frac{1}{m}-\nu\right)}\times\frac{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\mu n}}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}-1}. \qquad (l)\ bis$$

Para nos servirmos das quantidades da Tab. V, á taxa $\frac{t}{\mu}$, as formulas (b), (d), (f) e (h) não têm applicação a este caso de renda antecipada: porém o primeiro membro da equação (k), pondo por ε o valor $\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}$, fornecerá a formula seguinte para o multiplicador de $\frac{a}{m}$:

$$\frac{\left(\frac{t}{\mu}\right)}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\mu\nu}-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\mu\left(\frac{1}{m}-\nu\right)}}\times P_{\mu n}. \qquad (m)$$

E' mais conveniente para a exactidão do calculo que μn seja numero inteiro: quando o não fôr, o segundo membro da mesma equação (k) fornecerá est'outra formula:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\mu\nu}}\times\left\{1+\frac{\left(\frac{t}{\mu}\right)}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}-1}\times P_{\mu\left(n-\frac{1}{m}\right)}\right\} \qquad (n)$$

que conforme o caso, poderá dar para P numero inteiro de annuidades. E' preciso observar que o espaço de tempo ν, sendo uma fracção de anno, seria em relação aos intervallos de pagamento, m vezes menor: deve portanto multiplicar-se por m para o fazer relativo a $\frac{1}{m}$ do anno; por isso $\left\{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}\right\}^{m\nu}$ é o desconto na formula acima.

Exemplo.—*Seja a renda de 200$000 annuaes exigivel por metade em cada semestre por 3 ½ annos (7 pagamentos); fazendo se o desconto á taxa de 6 por cento composto de quatro em quatro mezes, e o primeiro pagamento devendo effectuar-se no fim de 3 mezes. Qual é o valor actual?*

Aqui, $a = 200000$; $\mu = 3$; $\nu = 1/4$; $m = 2$ e $n = 3{,}5$.
Pela formula (l) obtem-se:

$$100000 \times \frac{(1.02)^{0.75} - (1.02)^{-0.75}}{(1.02)^{1.5} - 1} = \frac{1.01496281 - 0.82441966}{1.0301495 - 1}.$$

Onde: log 100000.... =	5.0000000
log 0.19054315 =	$\bar{1}$.2799934
compl. log 0.0301495 =	1.5207199
Logarithmo =	5.8007133
Numero =	691995
E' o valor actual Rs.	631$995.

Para fazer o calculo por meio da Tab. V, como neste caso μn é numero fraccionario, convém mais a formula (n): pela qual tomando na Tab. o valor de $\mu\left(n - \frac{1}{m}\right) = 9$ annuidades á taxa de 2 %, tem-se para multiplicador de 100000:

$$\frac{1}{(1.02)^{3/4}} \times \left(1 + \frac{0.02 \times 8.16223671}{0.0301495}\right).$$

Onde: Compl. $\{3/4 \log (1.02)\}$ =	$\bar{1}$.9935499
log (1+5.414509 =	0.8071634
Logarithmo =	0.8007133

Resultando igual quantia, Rs. 631$995.

Se no exemplo acima, em lugar de 3 1/2, a annuidade fosse por 4 annos, conviria mais a formula (m), buscando na Tab. V o valor de $\mu n = 12$ annuidades, e teriamos:

$$\frac{0.02 \times 100000}{(1.02)^{3/4} - (1.02)^{-3/4}} \times P_{12} = \frac{2000 \times 10.57534122}{0.02970504} = \text{Rs. } 712\$023.$$

O 2º Supplemento á Tab. I e o Supplemento á Tab. II fornecem as quantidades do divisor.

Pela prova do valor A''', § 6º, podem-se verificar as quantias acima, juntando 100000, no 1º caso, á somma das primeiras seis prestações, e no 2º caso, á somma das primeiras sete, fazendo-se depois o desconto por 3 mezes, n'um e n'outro caso.

No § 16º da Secção III se acharão applicações da formula (l).

SECÇÃO TERCEIRA

AMORTIZAÇÃO

O systema de pagamento por amortização fazendo desapparecer a permanencia da divida integral; livrando o devedor da perspectiva do vencimento de um prazo fatal, se não de uma exigencia imprevista e quiçá caprichosa do pagamento; garantindo o credor com os immoveis, material e trafego das industrias; tem dado o maior incremento a grandes emprezas industriaes, agricolas, de estradas de ferro e outras, facilitando o levantamento de capitaes, cuja divida deva ser amortizada com o rendimento ordinario da exploração da empreza, depois de tiradas as despezas e o devido lucro, em um prazo conveniente: seja o prazo da concessão de um privilegio ou de outra qualquer fonte de renda. Tambem os governos se tem servido com vantagem deste modo de resgate no levantamento de emprestimos.

E' pois do maior interesse o conhecimento dos calculos que podem necessitar estas operações, no grande desenvolvimento e progresso das sociedades humanas na actualidade.

A pratica geralmente seguida nestes emprestimos é a emissão ao par ou com certo desconto, segundo permittem as circumstancias, de um suffieiente numero de *obrigações* de 100$000 réis cada uma, mais ou menos. (1) Estas obrigações emquanto não resgatadas vencem um juro annual pago aos semestres, e ás vezes tambem aos trimestres. Estas obrigações vão sendo annualmente resgatadas por sorteio e pagas ao par.

A's vezes tambem se destina um ou mais premios para as primeiras obrigações sorteadas.

---

(1) *Obrigações, titulos de preferencia* ou *de prelação*, são titulos emittidos pelo mutuario, representando o capital que recebeu do mutuante, e que se obriga a pagar aunualmente na relação da amortização por meio de sorteio. Tambem lhes dão a denominação ingleza: *debentures*.

Letras hypothecarias são titulos emitiidos pelo mutuante (sociedade ou banco de *credito real*), até a concurrencia dos valores mutuados, a cujo pagamento annual, em relação ao total das amortizações e por meio de sorteio, obriga todas as hypothecas fornecidas por todos seus mutuarios.

§ I.—QUOTA PARA AMORTIZAÇÃO: SEU CRESCIMENTO, E DECRESCIMENTO DO JURO PELO PROGRESSO DA AMORTIZAÇÃO.

Dada a importancia do emprestimo necessario á empreza, e estipulado o juro do capital; averiguado tambem o periodo dentro do qual deve fazer-se a amortização; para que esta se effectue nesse periodo, é necessario determinar a quota annual que, com o juro do capital, fórma a annuidade constante que a empreza tem de pagar cada anno, durante esse periodo.

Seja:

M, o capital mutuado, isto é, a importancia do emprestimo.
t, a taxa do juro annual.
$r = 1+t$.
a, a annuidade, comprehendendo o juro e a amortização.
q, a quota annual para amortização.

O caso mais simples é aquelle em que o juro e amortização são pagos juntamente no fim de cada anno.

O capital mutuado M com o seu juro em n annos importa Mr^n (veja-se a equação (a) § 1º, Secç. I); é esta a quantia de que o mutuante deve ser indemnizado. Ora, como além do juro do capital é convencionado que o mutuario pague annualmente uma quota q para amortização da divida do mesmo capital, é preciso que

$$Mr^n = \frac{r^n-1}{t} \times Mt + q\frac{r^n-1}{r-1}.$$

Donde se tira que a quantia mutuada M é igual ás n quotas annuaes de amortização com os seus juros (veja-se a formula (a) do § 2º, Secç. II):

$$M = q\frac{r^n-1}{r-1}; \qquad (a)$$

o que mostra que o juro do capital póde ser pago em periodos menores sem alterar nem o numero nem o valor das quotas para amortização; porque se se convencionar que a taxa do juro do capital seja $\frac{t}{m}$, pago m vezes por anno, e a taxa do das quotas t annual, deveremos ter (veja-se a formula (g) do § 6º Secç. I):

$$M\left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn} = \left\{\left(1+\frac{t}{m}\right)^{mn}-1\right\}M + q\frac{r^n-1}{r-1};$$

de que do mesmo modo se deduz:

$$M = q\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Isto ainda tem lugar quando a taxa do juro do capital é differente da do juro da amortização, como se vê em:

$$M\rho^n = (\rho^n - 1)M + q\frac{r^n - 1}{r - 1},$$

onde q e n conservão os seus valores, qualquer que seja o de ρ. Quando se faz annualmente o resgate do capital que se vai amortizando, é preciso, para que a annuidade seja constante, que a taxa do juro das quotas de amortização seja igual á taxa do juro do capital: como adiante se verá.

O juro do capital e a quota para amortização são neste systema duas contas distinctas.

O valor da quota q para amortização annual em n annos á taxa t de juros é:

$$q = \frac{Mt}{r^n - 1}. \qquad (b)$$

Exemplo.—*Sejão Rs. 100:000$000 mutuados; qual é a quota para amortizal-os em 20 annos a 6 por cento de juro ao anno?*

Aqui,

$$M = 100000000\,;\ n = 20\,;\ t = 0{,}06\,;\ r = 1.06.$$

$$q = \frac{6000000}{2.20713547} = 2:718\$456.$$

E' esta a quota para amortização que, com o juro do capital (pago de uma vez ou por partes em partes correspondentes do anno), perfaz a annuidade que hade amortizar capital e juros.

Seja a annuidade

$$a = t \times M + q.$$

Se o juro fôr pago nas mesmas épocas que a quota para amortização, e a esta se contar o juro á mesma taxa, teremos pela equação (a) do § 2°, Secç. II:

$$Mr^n = a\frac{r^n - 1}{t};$$

substituindo nesta equação, a, pelo seu valor acima dado, achar-se-ha reproduzida a primeira equação deste §: o que demonstra a proposição de *que a annuidade comprehende o juro do capital e a quota de amortização.*

Para que a quota annual attinja no fim do prazo o valor do capital é necessario, como mostra a equação *(a)*, contar-se-lhe o juro composto. Segue-se que na annuidade *constante* a, que comprehende a quota e o juro, a quota vai progressivamente crescendo, e consequentemente o juro decrescendo, á medida que progride a amortização. Convém portanto determinar em um anno qualquer n' do periodo n da amortização, ao receber a annuidade a, quanto deve ser destinado á amortização, e quanto é o juro do capital a esse tempo devido desde o antecedente pagamento.

Segundo a equação (a) deste §, a quota vai-se tornando de anno em anno,

$$q,\ qr,\ qr^2,\ qr^3, \ldots\ldots\ldots\ldots qr^{n-1};$$

por consequencia a parte da annuidade constante applicavel á amortização em um anno qualquer n' é:

$$qr^{n'-1} \qquad (b)\ bis$$

O complemento á annuidade será o juro devido sobre o capital que ficou por amortizar desde o anno anterior (veja-se o § 11° desta Secç.) Ora, o capital que ficou por amortizar é igual á somma dos termos, a partir do anno n' inclusivè. O juro desta somma é:

$$t \times \frac{qr^n - qr^{n'-1}}{r-1} = q \times (r^n - r^{n'-1}). \qquad (c)$$

A somma das duas quantidades deverá ser igual a a.

Com effeito,

$$qr^{n'-1} + q(r^n - r^{n'-1}) = qr^n = a.$$

Veja-se a equação (b) do § 2°, e os valores do QUADRO do § 7° desta Secç.

Portanto, para ter a parte que pertence á amortização, ***multiplica-se***

a quota pela potencia de 1 com o seu juro de um anno indicada pelo numero de annos decorridos menos um (Tab. I).

E para a parte que pertence ao juro, *obtidas as duas potencias de 1 com o seu juro de um anno, uma indicada pelo prazo total da amortização e a outra pelo numero de annos decorridos menos um, subtrahe-se a segunda da primeira, e multiplica-se a differença pela quota.*

Exemplo.—*No fim do 12° anno do periodo da amortização, ao receber a annuidade 8:718$456 que amortiza em 20 annos o capital mutuado de 100:000$000 réis e seus juros de 6 %, quanto deve ser levado á conta da amortização, e quanto é o juro do capital que estava por amortizar?*

Aqui,

$$q = 2718456;\ r = 1.06;\ n' = 12;\ n = 20.$$

Tomando na Tab. I os valores de r^n e $r^{n'-1}$, teremos para amortização:

$$2718456 \times 1.89829856 = \text{Rs. } 5:160\$441;$$

e para o importe do juro:

$$2718456 \times (3.20713547 - 1.89829856) = \text{Rs. } 3:558\$015.$$

Verificar-se-ha que a somma é igual á annuidade acima dada.

Retomando a equação

$$M = q.\frac{r^n - 1}{r - 1},$$

dividindo-a por M, e fazendo $\frac{q}{M} = p$, que é a relação da quota ao capital, isto é, quantos por cento do mesmo capital se destinão á sua amortização, teremos uma formula geral da quota para amortização do capital mutuado 1:

$$1 = p.\frac{r^n - 1}{r - 1}. \qquad (c)\ bis$$

Donde,

$$p = \frac{t}{r^n - 1} \cdot \text{(1)} \qquad (d)$$

Se fizermos $\frac{qr^{n'-1}}{M} = \pi$, $\frac{q(r^n - r^{n'-1})}{M} = \theta$, e $\frac{a}{M} = \alpha$ (veja-se a equação (*c*) do § seguinte); no anno n' será $\alpha = \theta + \pi$; isto é, relativamente ao capital, π será a porcentagem que pertence á conta da amortização, e θ a que pertence á conta de juro.

Substituindo q nas formulas (*b*) *bis* e (*c*), pelo valor de p acima dado na equação (*d*), teremos:

$$\pi = \frac{t \times r^{n'-1}}{r^n - 1} \qquad (e)$$

parte de α que no anno n' pertence á amortização; e

$$\theta = \frac{t \times (r^n - r^{n'-1})}{r^n - 1} \qquad (f)$$

parte de α que no anno n' pertence ao juro.

Estas formulas permittem achar a amortização e o juro independentemente da quota.

Assim, tomando o exemplo acima, *quantos por cento do capital pertencem á amortização na annuidade do 12° anno?*

Pela equação (*e*), teremos:

$$\pi = \frac{0{,}06 \times 1.89829856}{2.20713547} = 0{,}05160441.$$

Resposta, $5\frac{160441}{1000000}$ por cento.

E quantos por cento de juro?

Pela equação (*f*), teremos:

$$\theta = \frac{0{,}06 \times 1.30883691}{2.20713547} = .03558015.$$

Resposta, $3\frac{558015}{1000000}$ por cento.

---

(1) Póde achar-se este valor por meio das Taboas IV e V:

$$p = \frac{1}{\Sigma_n}. \quad \text{E tambem: } p = \frac{1}{P_n r^n}.$$

§ II.—RELAÇÃO DA ANNUIDADE Á QUOTA E AO CAPITAL—VALOR DE α, ISTO É, A ANNUIDADE (COMPREHENDENDO AMORTIZAÇÃO E JURO), CAPAZ DE AMORTIZAR N'UM TEMPO DADO O CAPITAL 1.

Cumpre observar que das equações precedentes se obtem uma expressão importante da relação da annuidade á quota da amortização.

Pois que

$$1 = p\frac{r^n - 1}{t},$$

recordando que a annuidade constante $a = (t+p)M$, e que $q = p \times M$, tira-se

$$r^n = \frac{t+p}{p} = \frac{a}{q}. \qquad (a)$$

E portanto,

$$a = qr^n. \qquad (b)$$

Se fizermos $\frac{a}{M} = \alpha$, isto é, a relação da annuidade ao capital, teremos tambem esta formula geral do valor da annuidade que deve extinguir a divida do capital 1 e seus juros:

$$\alpha = t+p = \frac{t}{1-r^{-n}}. \qquad (c)$$

Esta equação exprime o usual enunciado: *que uma quantia mutuada se amortiza, pagando-se annualmente tantos por cento de juros, e tantos por cento de amortização.*

E responde á pergunta:

Quantos por cento de annuidade são precisos para extinguir a divida do capital e seus juros em n *annos?*

Ou est'outra:

O capital 1 que annuidade produz em n *annos?*

Construem-se taboas que dão os valores de $\frac{t}{1-r^{-n}}$ para 1, 2, 3,... n annos, cujas quantidades sendo em relação a 1, basta multiplicar a que fôr relativa ao numero de annos da amortização, pelo capital, para ter a respectiva annuidade.

Tal é a Taboa VI. Assim para a amortização em 20 annos de um capital a 6 %, acha-se na Taboa no alinhamento de 20 e na columna 6 % a quantidade 0.08718456. Isto quer dizer que a annuidade deve compôr-se de 6 % de juros e 2.718456 % de amortização. Multiplicando o capital proposto por aquella quantidade, tem-se a annuidade que elle póde produzir em 20 annos a 6 %.

Como a formula acima iguala visivelmente

$$\frac{t \times r^n}{r^n - 1}, \qquad (d)$$

Tomando o valor de r^n na Tab. I, póde obter-se a porcentagem de annuidade, isto é, de quantos por cento do capital deve constar a annuidade, na falta de taboa especial.

Para o caso acima, acha-se na Tab. I $(1.06)^{20} = 3.20713547$; portanto,

$$\frac{0.06 \times 3.20713547}{3.20713547 - 1} = \frac{0.1924281282}{2.20713547} = 0.08718456.$$

Isto é: *obtida a potencia de 1 com o seu juro de um anno indicada pelo numero de annos, multiplica-se pelo juro annual de 1; depois da mesma potencia subtrahe-se 1; o quociente do primeiro resultado pelo segundo será a annuidade* α.

Deve-se aqui notar que se o presente valor de uma annuidade 1 fôr P_n (veja-se a equação (*b*), § 3°, Secç. II), a annuidade que póde produzir o capital 1 será:

$$\alpha = \frac{1}{P_n}.$$

O valor de P_n é dado pela Tab. V.

Tambem se póde fazer uso da Tab. IV; pois que:

$$\alpha = \frac{r^n}{\Sigma_n}.$$

§ III.—NUMERO DE ANNOS EM QUE DEVE REALIZAR-SE A AMORTIZAÇÃO.

Em lugar de procurar-se a annuidade ou a amortização que deve extinguir o capital em um determinado numero de annos, póde estabelecer-se a questão de saber em que numero de annos n se extinguirá

a divida do capital mediante determinada amortização e juro; é este o caso em que haja um limite de quantia a despender annualmente.

Da equação

$$p = \frac{t}{r^n - 1}$$

se tira:

$$n = \frac{\log\left(\frac{t+p}{p}\right)}{\log r}. \qquad (a)$$

Logo, para ter o numero de annos, *do logarithmo da porcentagem de annuidade (amortização e juro) subtrahe-se o logarithmo da porcentagem de amortização; depois, faz-se o logarithmo de 1 com o seu juro de um anno* (Tab. VII); *por fim, divide-se o primeiro resultado pelo segundo.*

Observe-se que

$$\frac{t+p}{p} = \frac{a}{q},$$

de que se póde fazer uso, quando convenha mais.

A Taboa IX fornece os valores de n, expressados em annos e dias, para diversas porcentagens de amortização indicadas no alto da columna, a diversas taxas de juro indicadas á margem. Suppondo que a exploração de uma industria, feitas as despezas, dê margem para o pagamento de 9 % sobre um capital que convém mutuar para o desenvolvimento da industria; e podendo obter-se o capital a 6 1/2 por cento de juro, ficão 2 1/2 para amortização. E' preciso saber em que tempo a amortização se realiza. Na Taboa IX, na columna 2 1/2 e no alinhamento de 6 1/2, achão-se 20 annos e 123 dias, que é o tempo necessario para que fique a divida extincta.

Exemplo.—*Pela formula acima, em quantos annos* n *se extingue um capital mutuado, pagando-se 6 % de juro annualmente, e 2 % de amortização?*

Aqui,

$$t = 0{,}06; \quad p = 0{,}02.$$

Pela formula obtem-se:

$$n = \frac{\log 4}{\log (1.06)} = \frac{0.60205999}{0.02530586};$$

portanto,

$$n = 23{,}791327.$$

São precisos para a amortização 23 annos e mais uma fracção. Com effeito, ao pagar a 23ª quota de 2 % de amortização, perfaz-se com as anteriores e seus juros a 6 %, $\frac{9399}{10000}$ do capital, como se póde verificar pela formula da equação (*a*) do § seguinte, ou por uma taboa que dê os valores de Σ_n (Tab. IV). Nesta Taboa acha-se na columna 6 %, alinhamento de 23, a quantidade 46,99582769 que, multiplicada pela dita porcentagem ($p = 0.02$), resulta que fica então amortizada aquella parte do capital. Ha pois um resto do capital a reembolsar com os juros até completo reembolso, cujo resto não é tão grande que dê lugar a uma 24ª quota. Analysemos, pois como avaliar este resto de capital e juros a reembolsar.

§ IV.—NUMERO FRACCIONARIO DE ANNOS.

Representemos sempre por n o numero inteiro de annos, e teremos para a amortização completa o prazo:

$$n+\frac{l}{k};$$

e pela equação (*c*) *bis* do § 1º desta Secç.,

$$1 = \frac{p}{t}\times\left(r^{n+\frac{l}{k}}-1\right),$$

de que se podem formar estas igualdades:

$$1 = \frac{p}{t}\left(r^{n+\frac{l}{k}}-r^{\frac{l}{k}}+r^{\frac{l}{k}}-1\right) = p\left(\frac{r^n-1}{t}\right)r^{\frac{l}{k}}+p\frac{r^{\frac{l}{k}}-1}{t}.$$

E' evidente, á vista das formulas (*a*) do § 6º, Secç. I, e (*a*) do § 2º, Secç. II, que a quantidade

$$p\times\left(\frac{r^n-1}{t}\right)\times r^{\frac{l}{k}} \qquad (a)$$

representa as n quotas de tantos por cento do capital 1 para amorti-

zação, com os seus juros até ao fim de $\left(n+\frac{l}{k}\right)$ annos, que é o capital que se acha amortizado no fim deste tempo (1); e que a quantidade

$$p\times\frac{r^{\frac{l}{k}}-1}{t} \qquad (b)$$

representa a quota p annual de tantos por cento do capital 1, correspondente á parte $\frac{l}{k}$ do anno, isto é, a parte da quota devida (2) para complemento da amortização; sendo além disto devido o juro do capital primitivo pela mesma fracção $\frac{l}{k}$ do anno.

Fazendo applicação ao exemplo do § 3º, em que o periodo da amortização é 23,791327, supponhamos que o capital mutuado seja de 10:000$000 réis, e façamos:

$$p=0.02\,;\quad r=1.06\,;\quad n+\frac{l}{k}=23.791327\,;\quad n=23\,;\ \text{e}\ \frac{l}{k}=0.791327.$$

Esta fracção corresponde a 289 dias, conta redonda.

---

(1) No fim de $\left(n+\frac{l}{k}\right)$ annos, o coeficiente da primeira quota será $r^{n+\frac{l}{k}}$, e o da ultima $r^{\frac{l}{k}}$; teremos a progressão:

$$r^{\frac{l}{k}}+r^{1+\frac{l}{k}}+r^{2+\frac{l}{k}}\ldots\ldots\ldots+r^{n-1+\frac{l}{k}}.$$

Cuja somma é:

$$\frac{r^{n+\frac{l}{k}}-r^{\frac{l}{k}}}{r-1}=\left(\frac{r^n-1}{t}\right)r^{\frac{l}{k}}.$$

(2) Dada a quota (afferente ao capital 1) p, pagavel no fim de cada anno, ella será igual ao juro de $\frac{p}{t}$, isto é, $\frac{p}{t}\times(r-1)$; mas a parte de juro annual correspondente á fracção $\frac{l}{k}$ do anno é $\left(r^{\frac{l}{k}}-1\right)$; como se demonstrou no § 6º da Secç. I; logo, a parte da quota annual correspondente á dita fracção do anno é:

$$p\times\frac{r^{\frac{l}{k}}-1}{t}.$$

A quota de amortização sendo 2 por cento iguala neste caso 200$000 réis; portanto (formula (*a*)):

$$200.000 \times \frac{(1.06)^{23}-1}{0.06} \times (1.06)^{0.791327}.$$

Com as Taboas I e VIII, faremos:

$$\begin{aligned}
\log 200000 &= 5.3010300 \\
\log 2.81974966 &= 0.4502105 \\
\log(\log 1.06) &= \bar{2}.4032212 \\
\log 0.791327 &= \bar{1}.8983559 \\
\hline
\log &= \bar{2}.3015771 \\
\text{Numero} = \log(1.06)^{0.791327} &= 0.0200252 \\
\text{Compl. log } 0.06 &= 1.2218487 \\
\hline
\log &= 6.9931144 \\
\text{Numero} &= 9842704
\end{aligned}$$

Portanto,

Rs. 9:842$704;

é este o capital que se acha amortizado no fim de 23 annos e 289 dias. Pela formula (*b*), o resto do capital devido é:

$$200000 \times \frac{(1.06)^{0.791327}-1}{0.06} = 200000 \times \frac{1.047189-1}{0.06} = \text{Rs. } 157\$296.$$

Com esta quantia saldão-se os 10:000$000 réis; devendo além disto pagar-se o juro do capital correspondente aos 289 dias, na importancia de Rs. 471$890:

Veja-se a formula (*a*) do § 6º, Secç. I.

Tambem se póde expor esta mesma questão deste modo:

Tendo um mutuario pago durante 23 annos a sua annuidade de 8 % do capital, sendo 6 % de juro e 2 % de amortização, visto que a = (t+p)M; *quanto deve pagar, finda a fracção 0.791327 do 24º anno, por saldo do capital (que ficou devido depois do ultimo pagamento da annuidade), e quanto de juro desse mesmo capital devido, o que terminará a transacção?*

A formula (*b*) do § 8º desta Secç. dá o valor do saldo do capital. Sendo o capital 10.000$000, teremos:

$$200\$000 \times \frac{(1.06)^{23.791327} - (1.06)^{23}}{0.06} = 200000 \times \frac{4.00000000 - 3.81974966}{0.06}$$

$$= \text{Rs. } 600\$834.$$

Como neste caso o pagamento do juro coincide com o pagamento da amortização, $\rho = r$ e $\frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{l}{k}$, nas formulas do dito § 8º. Portanto o juro do capital devido é:

$$200\$000 \times \frac{(1.06)^{23.791327} - (1.06)^{23}}{0.06} \times \{(1.06)^{0.791327} - 1\} = 600834 \times 0.0471893$$

$$= \text{Rs. } 28\$352.$$

A somma destas duas quantias será o pagamento total, que iguala o do calculo precedente; e será dado pela formula (*d*) do § 8º:

$$\frac{800\$000 - 763950}{0.06} \times 1.0471893 = \text{Rs. } 629\$186.$$

§ V.—EM QUALQUER ÉPOCA DO PERIODO DA AMORTIZAÇÃO, DETERMINAR O QUE ESTÁ AMORTIZADO, E O QUE FALTA AMORTIZAR.

Examinemos agora a questão de saber que parte do capital se acha amortizada tendo decorrido uma parte do periodo da amortização. E tambem est'outra questão: tendo decorrido uma parte do periodo da amortização que parte do capital falta amortizar?

Façamos:

p', parte do capital 1 que se acha amortizado.
p'', parte do capital 1 que falta amortizar.
p_n, porcentagem annual que deve mortizar o capital 1 em n annos.
$p_{n'}$, porcentagem annual que deve amortizar o capital 1 em n' annos.

Que $n > n'$.

Da equação (*c*) *bis* do § 1º deriva-se a seguinte:

$$p' = p_n \times \frac{r^{n'} - 1}{t}. \qquad (a)$$

será esta a parte que se acha amortizada com o pagamento da respec-

tiva quota no fim de n' annos de um capital cuja amortização completa se faz em n annos.

Substituindo nesta equação p_n pelo seu valor $\frac{t}{r^n-1}$, temos est'outra equação :

$$p' = \frac{t}{r^n-1} \times \frac{r^{n'}-1}{t} = \frac{r^{n'}-1}{r^n-1} \qquad (b)$$

que permitte achar a parte amortizada independentemente da annuidade, e da quota ou porcentagem d'amortização ; *bastando saber o prazo, tempo decorrido e taxa do juro capitalizavel* ; e responde á questão : que parte se acha amortizada em n' annos, de um capital mutuado que á taxa t da quota se amortiza em n annos ?

Obtidas as duas potencias (Tab. I) *de* 1 *com o seu juro de um anno, uma indicada pelo numero de annos decorridos e a outra pelo prazo total, subtrahe-se* 1 *de cada uma* ; *o quociente da primeira differença pela segunda será a parte amortizada do capital* 1.

Como $\frac{r^{n'}-1}{t} = \frac{1}{p_{n'}}$, substituindo este valor na formula (a), teremos ainda :

$$p' = \frac{p_n}{p_{n'}}. \qquad (c)$$

Isto é, que *a parte do capital amortizado tambem é igual á relação da porcentagem precisa para amortizal-o em* n *annos, á que é precisa para amortizal-o em* n' *annos.*

Póde-se ainda obter *a parte do capital amortizada, tomando a differença entre a annuidade que o amortiza em* (n—n') *annos e a que o amortiza em* n *annos, dividindo esta differença pela primeira annuidade ;* comtanto que a taxa de juro seja a mesma para o capital e para a quota :

$$\frac{a_{n-n'}-a_n}{a_{n-n'}} = \frac{\alpha_{n-n'}-\alpha_n}{\alpha_{n-n'}}.$$

Veja-se abaixo a demonstração.

Agora, a parte que falta amortizar é evidentemente a differença entre o capital 1 e a parte que se acha amortizada.

Portanto,

$$p'' = 1 - p_n \frac{r^{n'} - 1}{t}. \qquad (d)$$

Esta equação dá o valor da parte p'' do capital que falta amortizar, immediamente depois de realizado o n' pagamento.

Tambem, como $p_n \frac{r^n - 1}{t} = 1$, obtem-se ainda:

$$p'' = p_n \frac{r^n - r^{n'}}{t} \qquad (e)$$

Pondo nesta equação em lugar de p_n o seu valor $\frac{t}{r^n - 1}$, resulta:

$$p'' = \frac{r^n - r^{n'}}{r^n - 1}. \qquad (f)$$

Equação que permitte achar a parte do capital que falta amortizar independentemente da annuidade, e da quota ou porcentagem de amortização; bastando conhecer t, n e n', como na equação (b).

Obtidas (Tab. I) *as duas potencias de 1 com o seu juro de um anno, uma indicada pelo prazo total da amortização e a outra pelo numero de annos decorridos, faz-se a sua differença; depois subtrahe-se 1 da primeira; o quociente do primeiro resultado pelo segundo será a parte que falta amortizar.*

Como $\frac{r^{n'} - 1}{t} = \frac{1}{p_{n'}}$, substituindo este valor na equação (d), teremos:

$$p'' = \frac{p_{n'} - p_n}{p_{n'}}. \qquad (g)$$

O que mostra que, dando-se a porcentagem que amortiza o capital mutuado em n' annos, e a que o amortiza em n annos, a parte do capital que falta amortizar *é igual á relação da differença entre as duas porcentagens á primeira porcentagem.*

A parte do capital que falta amortizar tambem *é igual á relação da annuidade que amortiza capital e juros em* n *annos, á que o amortiza em* (n—n') *annos.* E' preciso neste caso que o juro do capital seja o mesmo do da amortização.

Para o demonstrar, seja:

a_n uma annuidade que extingue um capital e juros em n annos.

$a_{n-n'}$, uma annuidade que extingue o mesmo capital e juros á mesma taxa em (n—n') annos.

Pela equação (*c*) do § 2°, achar-se-ha:

$$\frac{a_n}{a_{n-n'}} = \frac{\left(\frac{t}{1-r^{-n}}\right)M}{\left(\frac{t}{1-r^{-n+n'}}\right)M} = \frac{r^n - r^{n'}}{r^n - 1},$$

resultado igual ao da equação (*f*) deste §; portanto,

$$p'' = \frac{a_n}{a_{n-n'}} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-n'}}. \qquad (h)$$

E' o que era preciso demonstrar.

Ver-se-ha no § 16 que o capital que falta amortizar (pagamento antecipado) é igual ao desconto, pelo tempo que falta para completar o prazo, da annuidade que amortiza *capital e juros* no prazo total da amortização.

EXEMPLO.—*Seja um capital que se amortiza em 20 annos, pagando no fim de cada anno* $2\frac{18522088}{100000000}$ *por cento para amortização e 8 por cento de juros. Pergunta-se: que parte estará amortizada no fim de 10 annos, realizado que seja o decimo pagamento, e que parte faltará amortizar?*

Segundo as formulas (*b*) e (*f*), que só dependem do juro contado á quota da amortização e do numero de annos (aqui, $r = 1{,}08$, $n = 20$ e $n' = 10$), teremos, recorrendo á Tab. I, que do capital 1

achar-se-ha amortizado (p'), $\frac{1.15892500}{3.66095714} = 0{,}316563389$;

faltará amortizar (p'')..... $\frac{2.50203214}{3.66095714} = 0.683436611$.

Somma. 1.000000000.

como deve ser.

Se tomarmos a formula (*c*), que dá a relação entre as porcentagens d'amortização (ou quotas, podendo-se substituir p por q); e a formula (*h*), que dá a relação entre as annuidades, chegamos ao mesmo resultado.

Aqui (veja-se a Tab. VI, col. 8 %),

$$p_n = 0.0218522088$$
$$p_{n'} = 0.0690294885$$
$$\alpha_n = 0.1018522088$$
$$\alpha_{n-n'} = 0.1490294885.$$

Portanto, do capital 1

estará amortizado (p) $\frac{.0218522088}{.0690294885} = 0.316563389.$

faltará amortizar (p'') $\frac{1018522088}{1490294885} = 0.683436611.$

Se o capital fôr 1.500:000$000 réis, acharemos :

Amortizado,	Rs.	474:845$084
Por amortizar,	Rs.	1.025:154$916
Somma		1.500:000$000

Em todos os casos precedentes obtem-se p' e p'' de *um capital qualquer*, sem ser necessario determinar-lhe o valor absoluto.

Veja-se o § 16° desta Secç.

§ VI.—DETERMINAR A ÉPOCA EM QUE SE ACHARÁ AMORTIZADA UMA CERTA PARTE DO CAPITAL MUTUADO.

Resta examinar o numero de annos n' que são precisos para se achar amortizada a parte p' do capital mutuado.

Da equação (a) do § 5°, tira-se a seguinte :

$$n' = \frac{\log (tp'+p_n) - \log p_n}{\log r}.$$

Exemplo.—*Seja um capital para que se destina 1 por cento de amortização e 6 por cento de juro ; em quantos annos se terão amortizado* $^3/_8$ *do capital ?*

Na equação acima,

$$t = 0{,}06 \; ; \; p' = 0{,}375 \; ; \; p_n = 0.01.$$

Logo,

$$n' = \frac{\log 0.0625 - \log 0.01}{\log 1.06} = \frac{.5118834}{.0253059} = 20.227.$$

No fim de 20 annos e 101 dias estarão amortizados $^3/_8$ do capital mutuado.

§ VII.—EMISSÃO DE OBRIGAÇÕES RESGATAVEIS POR SORTEIO. QUADRO DOS JUROS E AMORTIZAÇÃO.

Tratemos agora especialmente do caso de levantamento de capitaes mediante emissão de obrigações resgataveis annualmente por sorteio, e o juro do capital a pagar aos semestres, ou outra fracção do anno.

Façamos :

M, o capital mutuado.

q, a quota da amortização effectiva, isto é, $p \times M$.

T, o juro effectivo pago em cada fracção do anno, isto é, $\tau \times M$.

t, a taxa do juro annual contado ás quotas de amortização.

$r = 1 + t$.

τ, a taxa de juro do capital relativo á $\frac{1}{m}$ do anno.

$\rho = 1 + \tau$.

m, quantas vezes no anno se deve pagar o juro do capital.

Seja um capital mutuado M que deve ser amortizado por uma quota annual, e o juro pago aos semestres. Empreguemos as notações acima.

Quadro da marcha da amortização

ANNO	1° SEMESTRE	2° SEMESTRE		
	1° pagamento	*2° pagamento*		
	Juro do capital não amortizado	Juro do capital não amortizado	Quota d' mortização e seu juro	Total do 2° pagamento
1.°	$T - \tau q \frac{r^0 - 1}{t}$	$T - \tau q \frac{r^0 - 1}{t}$	$+ q + t q \frac{r^0 - 1}{t}$	$= T + q \left\{ 1 + (t - \tau) \frac{r^0 - 1}{t} \right\}$
2.°	$T - \tau q \frac{r^1 - 1}{t}$	$T - \tau q \frac{r^1 - 1}{t}$	$+ q + t q \frac{r^1 - 1}{t}$	$= T + q \left\{ 1 + (t - \tau) \frac{r^1 - 1}{t} \right\}$
n	$T - \tau q \frac{r^{n-1} - 1}{t}$	$T - \tau q \frac{r^{n-1} - 1}{t}$	$+ q + t q \frac{r^{n-1} - 1}{t}$	$= T + q \left\{ 1 + (t - \tau) \frac{r^{n-1} - 1}{t} \right\}$

Observações.—1.ª No juro *effectivo* do capital correspondente a cada periodo, e aqui representado por T, se a taxa τ do juro do capital

fôr igual a $\frac{t}{m}$, isto é, a $\frac{1}{m}$ *do juro annual que se conta ás quotas de amortização*, quer o juro do capital seja pago de uma vez, quer seja por partes correspondentes do anno, o resgate annual não altera nem o valor da annuidade a nem o numero n de annos da amortização. Em qualquer anno n, cada pagamento de juro em cada fracção do anno é:

$$T-\frac{t}{m}q\frac{r^{n-1}-1}{t};$$

isto é, o juro do capital primitivo diminuido do juro do capital que já se acha amortizado. Este pagamento feito m vezes por anno, torna-se cada anno:

$$m\times T-q(r^{n-1}-1).$$

A quota da amortização na ultima fracção do anno vem a ser

$$q+q(r^{n-1}-1),$$

isto é, a primitiva quota augmentada com a importancia de juros que, em virtude do resgate, tem deixado de se pagar, e que por este motivo se applicão ao resgate. Sommando as duas ultimas quantidades que representão todos os pagamentos cada anno, e sendo pela hypothese, $T=\frac{t}{m}M$, tem-se:

$$tM+q=a.$$

O que demonstra a proposição.

2.ª Porém se o juro do capital fosse differente daquelle que se conta ás quotas de amortização; a annuidade a deixaria de ser constante no caso de resgate annual, e diminuiria ou augmentaria progressivamente, segundo que o juro do capital fosse maior ou menor do que o da amortização; do contrario, o prazo da amortização n seria alterado.

No quadro precedente vê-se que todos os pagamentos de um anno n qualquer sommão:

$$mT+(t-m\tau)q\frac{r^{n-1}-1}{t}+q.$$

Se:

$t=m\tau$, caso em que a taxa de juro do capital é a mesma da amortização, a annuidade é constante;

$t<m\tau$, a annuidade decresce;
$t>m\tau$, a annuidade augmenta.

O valor de cada pagamento em qualquer anno acha-se determinado pelas respectivas formulas do quadro, as quaes se acharáõ conformes com as que já forão apresentadas para o calculo do capital amortizado e do que falta amortizar n'uma época qualquer do prazo total de amortização.

Neste caso de resgate annual e pagamento de juros por partes em partes correspondentes do anno, quando o periodo da amortização é um numero fraccionario de annos torna-se necessaria uma analyse especial para determinar os ultimos pagamentos pela fracção do anno.

§ VIII.—ULTIMOS PAGAMENTOS POR FRACÇÃO DE ANNO, DO JURO DO CAPITAL NÃO RESGATADO, E DO SALDO A RESGATAR.

Que o periodo total da amortização seja $\left(n+\frac{l}{k}\right)$, e o juro a pagar m vezes por anno. Ora $\frac{1}{m}$ do anno, época em que tem de se pagar τ de juro do capital, póde ser maior ou menor que $\frac{l}{k}$. Se um ou mais periodos $\frac{1}{m}$ do anno fôr menor que $\frac{l}{k}$, ainda dura o periodo da amortização quando se tem de pagar o juro do capital nos periodos $\frac{1}{m}$, para depois no fim do periodo total da amortização pagar-se o juro do tempo decorrido desde a época $\frac{x}{m}$ até á época $\frac{l}{k}$, juntamente com o saldo da amortização. Para avaliar esta fracção de periodo do juro em relação a $\frac{l}{k}$, tire-se da fracção $\frac{l}{k}$ tantas vezes $\frac{1}{m}$ quantas vezes nella se contiver; e multiplique-se o resto por m; notaremos esta fracção afferente ao juro devido na época do vencimento da amortização por $\frac{\lambda}{\varkappa}$. Que x seja o maior numero de vezes que possa conter-se $\frac{1}{m}$ em $\frac{l}{k}$; teremos:

$$\left(\frac{l}{k}-\frac{x}{m}\right)\times m=\frac{\lambda}{\varkappa} \qquad (a)$$

E' esta a fracção de periodo do juro pela qual elle é devido.

A razão é que tomando-se $\frac{l}{k}$ (fracção de anno), do periodo $\frac{1}{m}$ do anno, tem-se uma extensão de tempo m vezes menor do que a que deve ser; é preciso pois multiplicar por m a fracção do periodo $\frac{1}{m}$, para ter uma extensão de tempo igual á mesma fracção do anno.

Da equação acima se deduz :

$$\frac{l}{k}=\frac{x+\frac{\lambda}{\varkappa}}{m} \qquad (a)\ bis$$

Sendo x o numero de vencimentos de juros antes da amortização total durante a fracção do ultimo anno.

Façamos, para abreviar, $1+\tau=\rho$; e o juro da parte do capital que falta amortizar pela fracção de periodo que lhe é relativo, $\rho^{\frac{\lambda}{\varkappa}}-1$.

Estabelecido isto, considere-se que o ultimo pagamento deve compor-se das tres parcellas seguintes :

1.ª Juro da parte do capital que falta amortizar, pela fracção do periodo que lhe é relativo, (equação (*e*) do § 5º). $\left.\right\} q\,\frac{r^{n+\frac{l}{k}}-r^{n}}{t}\left(\rho^{\frac{\lambda}{\varkappa}}-1\right)$

2.ª Juro do capital amortizado até o ultimo anno (equação (*a*) do § 5º), que em virtude do resgate é applicado á amortização..... $\left.\right\} q\,\frac{r^{n}-1}{t}\left(r^{\frac{l}{k}}-1\right)$

3.ª Parte da quota de amortização relativa á fracção $\frac{l}{k}$ (formula (*b*) do § 4º)..... $\left.\right\} q\,\frac{r^{\frac{l}{k}}-1}{t}$

As duas ultimas quantidades, que representão o saldo devido da amortização, sommão :

$$q\times\frac{r^{n+\frac{l}{k}}-r^{n}}{t}. \qquad (b)$$

Juntando a esta quantidade o juro pela fracção do anno que lhe é relativa, será o pagamento total que tem a fazer o mutuario:

$$q\times\frac{r^{n+\frac{l}{k}}-r^{n}}{t}\times\rho^{\frac{\lambda}{\varkappa}}. \qquad (c)$$

Recordando (*vide* § 2º equação (*b*)) que $qr^{n+\frac{l}{k}}=a$, póde-se obter a seguinte expressão que tem o mesmo valor :

$$\frac{a-qr^n}{t}\times\rho^{\frac{\lambda}{x}}. \qquad (d)$$

EXEMPLO.—*Supponhamos que uma empresa tenha levantado o emprestimo de Rs. 100:000$000 vencendo juros de 9 % pagos aos trimestres, e 12 % de amortização annual (resgate de obrigações), que deve completar-se em 6 $\frac{493743}{1000000}$ annos (vide o § 3°). Qual é a importancia devida no fim desta fracção do 7° anno?*

Os 493743 millionesimos do anno correspondem a 180 dias (conta redonda), e como o juro do capital é pago aos trimestres, segue-se que deve já estar pago o 1° trimestre do 7° anno; falta pois pagar, juntamente com o saldo do capital, o juro devido no 2° trimestre, isto é: $\rho^{\frac{\lambda}{x}}-1$, do capital que faltava amortizar no fim do 6° anno. Determinemos a fracção $\frac{\lambda}{x}$, pela equação (*a*).

Teremos :

$$(0.493743-0.25)\div 4 = 0.974972.$$

Com effeito os 974972 millionesimos do 2° trimestre dão 89 dias, que sommados com os 91 do primeiro, completão os 180 primeiros dias do 7° anno, qae coincidem com o vencimento do periodo da amortização.

Aqui,

$$q = 12000000\,;\quad r = 1.09\,;\quad \rho = 1.0225.$$

Será, portanto, o juro relativo a este 2° trimestre do capital que no fim do 6° anno faltava amortizar (primeira formula) :

$$12{:}000\$000\times\frac{(1.09)^{6.493743}-(1.09)^6}{0.09}\times\left\{(1.0225)^{0.974972}-1\right\} = \text{Rs. } 213\$165.$$

O saldo para completar a amortização do capital é evidentemente a parte que ficou em circulação por amortizar no fim do 6° anno, paga a 6ª quota; o qual, por qualquer das formulas já apresentadas, se achará ter sido 9:719$985. Actualmente perfazem esta quantia : o seu juro, e a quota de amortização correspondente á fracção do 7° anno.

Com effeito, o juro do capital então amortizado (segunda formula) é :

$$12:000\$000 \times \frac{(1.09)^6 - 1}{0.09} \times \{(1.09)^{0.493743} - 1\} = 3:924\$275$$

A quota correspondente á fracção do anno (terceira formula), é:

$$12:000\$000 \times \frac{(1.09)^{0.493743} - 1}{0.09} = 5:795\$710$$

Somma 9:719$985

igual á importancia por amortizar no fim do 6º anno.

Veja-se a OBSERVAÇÃO no § 11.º

§ IX.—QUANTAS OBRIGAÇÕES SE PODEM RESGATAR ANNUALMENTE.

Note-se que quando uma empreza emitte titulos de divida ou obrigações que deveráõ ser resgatadas annualmente, o valor de cada resgate não será rigorosamente conforme os calculos precedentes, em consequencia de se não fraccionarem as obrigações, mas dever ser recolhido um numero inteiro dellas.

Póde-se proceder de dois modos para determinar o numero de obrigações a resgatar annualmente:

1.º Tomando o numero que comportar a quantia destinada para amortização, deixando o saldo (se o houver) para addicionar ao seguinte sorteio.

2.º Tomando o numero que comportar a quantia destinada para amortização; e havendo saldo: se *fôr menor* do que metade do valor nominal de uma obrigação, reserval-o para addicionar ao seguinte sorteio; se *fôr maior*, sortear mais uma obrigação, devendo o complemento ser deduzido do seguinte sorteio.

As perturbações que isto occasiona não serão importantes, mesmo com o primeiro modo, se o valor nominal de cada obrigação não exceder de 100$000 réis; mais se esse valor fôr grande, convirá adoptar o segundo modo em que ha compensações:

EXEMPLO.—*Seja a mesma supposição do § antecedente de um emprestimo de 100:000$000 a 9 % de juros e 12 % de amortização, emittindo-se para esse fim 1000 obrigações de 100$000, que deveráõ ser annualmente resgatadas por sorteio pagando-se cada trimestre os juros (2 1/4 %) do capital por amortizar.*

As quantias destinadas á amortização, segundo as formulas dos § 7º e 8º, as fracções a levar em conta do sorteio seguinte, e o numero de

obrigações que se podem resgatar, tanto pelo primeiro como pelo segundo modo, aprecião-se no seguinte quadro:

Fim do anno	*Quantia destinada á amortização*	PRIMEIRO MODO		SEGUNDO MODO	
		Saldo do sorteio anterior	*Numero de obrigações resgataveis*	*Saldo do sorteio anterior*	*Numero de obrigações resgataveis*
1.º	12:000$000	—	120	—	120
2.º	13:080$000	—	130	—	131
3.º	14:257$200	+80$000	143	—20$000	142
4.º	15:540$348	+37$200	155	+37$200	156
5.º	16:938$979	+77$548	170	—22$452	169
6.º	18:463$488	+16$527	184	+16$527	185
No fim de 180 dias do 7º anno	9:719$985	+80$015	98	—19$985	97
	100:000$000		1.000		1.000

Para obter o numero de obrigações resgataveis n'um anno qualquer, é preciso, além da quota qr^{n-1} destinada para amortização desse anno, examinar se ficou algum saldo positivo ou negativo do sorteio antecedente para se computar nesta quota.

Este saldo acha-se facilmente, dividindo o capital que ficou amortizado pelo valor V de uma obrigação, tratando o quociente e o resto (se o houver) como acima se disse, segundo que se adopte o primeiro ou o segundo modo.

Teremos:

$$\frac{q \times \frac{r^{n-1}-1}{t}}{V}.$$

Exemplo.—*Qual é o numero de obrigações resgataveis no 5º anno do Quadro antecedente?*

Tomando na Tab. IV a quantidade da columna 9 % no alinhamento de 4, tem-se:

$$\frac{12000000 \times 4{,}573129}{100000},$$

que dá o quociente 548, e o resto 77548.

A quota do 5º anno obtem-se pela Tab. I:

$$qr^{n-1} = 12000000 \times 1{,}41158161 = 16938979.$$

1º MODO: O sorteio do 4º anno completou o resgate de 548 obrigações, e ficou o saldo positivo de..... 77$548
Quota do 5º anno..... 16:938$979

17:016$527

que permitte o resgate de 170 obrigações, ficando o saldo positivo de 16$527 para o sorteio seguinte.

2º MODO: O sorteio do 4º anno completou o resgate de 159 obrigações, e ficou o saldo negativo de..... —22$452
Quota do 5º anno..... +16:938$979

16:916$527

que permitte o sorteio de 169 obrigações, ficando para o seguinte o saldo positivo de 16$527.

§ X.—PROBABILIDADE DE SEREM SORTEADAS AS OBRIGAÇÕES DE UM EMPRESTIMO.

Seria imprudencia o comprar com premio obrigações de uma emissão de que grande numero estivessem já recolhidas, por causa do risco de serem sorteadas e pagas ao par. Conviria portanto determinar esse risco para resolver sobre a compra: o calculo porém das probabilidades é extremamente laborioso e complicado, tornando o por isso de todo o ponto impraticavel nestes casos.

Poderemos comtudo orientar-nos por um meio facil, determinando por qualquer das respectivas formulas do § 5º, o capital que actualmente falta amortizar; e pela formula do § 6º, a época em que se achará amortizado metade deste capital: *nesta época é mais provavel que tenhão sido sorteadas pelo menos metade das obrigações que possuimos ou pretendemos comprar, do que que o não tenhão sido.*

Veja-se a nota (*e*)

Seja n' (época actual) o numero de annos que tem decorrido do

prazo total da amortização, depois do sorteio deste ultimo anno, cuja quota deve ter sido $qr^{n'-1}$ (formula (*b*) *bis* do § 1°). A quota do seguinte sorteio será $qr^{n'}$. Se representarmos por M', o capital que fica devido depois deste sorteio do n' anno (§ 5°), teremos a equação:

$$qr^{n'} \times \frac{r^x - 1}{r - 1} = \frac{M'}{2}.$$

De que resulta:

$$x = \frac{\log\left(qr^{n'} + (r-1)\frac{M'}{2}\right) - \log qr^{n'}}{\log r}. \qquad (a)$$

Desta época a x annos, estará amortizado metade do capital actualmente devido.

O capital que falta amortizar reprezenta evidentemente o numero de obrigações actualmente em circulação, das quaes metade ficaráõ recolhidas no sorteio que amortizar metade deste capital actualmente devido. Se as que possuimos forem em maior numero do que as que deveráõ ser sorteadas, ha certeza de o serem uma parte dellas igual á differença entre essas a sortear e as restantes actualmente em circulação que não possuimos.

Exemplo.—*Seja o capital de 1000 contos mutuado a 6 1/2 por cento de juros, e 1 por cento de amortização.*

Emittirão-se 5000 obrigações de 200$000 réis.

Vê-se na Tab. IX que este capital se achará amortizado em 32 annos, com muito pequena differença.

No fim do 15° anno do periodo da amortização (depois do sorteio), compro 100 obrigações: em que epoca será mais provavel terem sido sorteadas pelo menos 50, do que não o terem sido?

No fim do 15° anno faltão amortizar, $(M') = 758:178\$307$ réis; e a quota para amortização no anno seguinte $(qr^{n'})$ será 25:718$410.

Tomando a equação precedente, teremos:

$$x = \frac{\log(25718410 + 0{,}065 \times 379089153) - \log 25718410}{\log 1.065} = \frac{0{,}2918347}{0{,}0273496}$$

$$= 10{,}67.$$

No fim de 10 annos e 241 dias, ou seja até ao sorteio do 11° anno depois da data actual (26° do prazo total da amortização), ha mais probabilidade de terem sido sorteadas pelo menos metade das obrigações, do que não o terem sido. Podendo portanto tomar-se para cada obrigação este tempo como a sua duração provavel em circulação [1].

§ XI. — LEVANTAMENTO DE EMPRESTIMO NEGOCIADO COM UM DESCONTO QUALQUER.

Analysemos o caso em que uma empresa, para levantar um emprestimo que deve ser amortizado em determinado periodo, tenha de negocial-o, não ao par (que é quando a taxa do desconto iguala a do juro), mas com certo desconto, favoravel ou desfavoravel.

E' necessario determinar o valor actual de todos os pagamentos futuros segundo a taxa de desconto ajustado. Se os juros e amortização tivessem de ser pagos juntos periodicamente pela empresa, ou mesmo separadamente em epocas diversas, mas sem resgate (o que somente occasionaria duas contas distinctas), o seu valor actual, fazendo-se o desconto exigido pelo banqueiro, acharia-se directamente pelas equações respectivas da Secç. II; mas tendo os juros de ser pagos em periodos mais curtos do que a amortização, os primeiros pagamentos de cada anno, por causa do resgate, vão progressivamente sendo menores e o ultimo maior, como mostra o quadro do § 7° desta Secç., e obrigão a calculos muito mais laboriosos.

Procuremos pois uma formula que dê o valor actual de todos os pagamentos a certo desconto.

Que a taxa do desconto por cada periodo $\frac{1}{m}$ do anno seja $(\delta - 1)$; de sorte que se a taxa annual do desconto ajustado fôr τ, $\delta = 1 + \frac{\tau}{m}$.

Aqui considera-se o desconto por periodos $\frac{1}{m}$ do anno, por serem nos mesmos periodos os pagamentos dos juros. A amortização ou resgate tem lugar no fim de cada anno.

O juro do capital mutuado que a empreza tem de pagar em cada

---

[1] Sobre o sorteio de *letras hypothecarias* nada se póde prevêr; porque uma mesma roda contém os numeros de letras de diversos emprestimos a diversos prazos.

epoca vai, como se disse, decrescendo em virtude do sorteio, visto que será o juro do capital que falta amortizar nessas epocas.

Ora, pela formula (*e*) do § 5° (que dá o valor do capital que falta amortizar), pondo q em lugar de p_n, e recordando que $qr^n = a$, e que o juro $\frac{t}{m}$ é pago em cada epoca $\frac{1}{m}$ do anno *sobre o capital que ficou por amortizar no anno anterior*, facilmente se deduz que este juro em cada periodo do anno n será:

$$\frac{t}{m} \times \frac{a - qr^{n-1}}{t} = \frac{a}{m} - \frac{qr^{n-1}}{m};$$

que é o valor de cada pagamento, excepto o ultimo, no anno n (equação (*c*) § 1°).

O ultimo pagamento no fim de cada anno conterá, além deste juro, a quota primitiva

$$q,$$

e o juro do que se acha amortizado (equação (*a*) § 5°, pondo q em lugar de p_n):

$$t \times \frac{qr^{n-1} - q}{t};$$

o qual se applica á amortização.

Sommando estas tres quantidades, achar-se-ha que

$$\frac{a}{m} + \frac{(m-1)q}{m} \times r^{n-1}$$

é o valor do ultimo dos pagamentos em qualquer anno n.

Com estes dados formaremos o seguinte quadro de uma amortização em $\left(n + \frac{l}{k}\right)$ annos, sendo o juro pago m vezes por anno.

Supponhamos que $m = 4$, $n = 3$, e $\frac{l}{k} = \frac{2 + \frac{\lambda}{z}}{m}$ (veja-se a formula (*a*) *bis* do § 8°).

Procuremos o valor actual de cada pagamento descontado por δ.

Quadro do desconto de cada pagamento de juro e amortização

ANNO	1.º TRIMESTRE *Juro*	2.º TRIMESTRE *Juro*	3.º TRIMESTRE *Juro*	4º. TRIMESTRE *Juro e amortização*
1.º	$\dfrac{\frac{a}{m}-\frac{qr^0}{m}}{\delta}$	$\dfrac{\frac{a}{m}-\frac{qr^0}{m}}{\delta^2}$	$\dfrac{\frac{a}{m}-\frac{qr^0}{m}}{\delta^3}$	$\dfrac{\frac{a}{m}+\frac{m-1}{m}\times qr^0}{\delta^m}$
2.º	$\dfrac{\frac{a}{m}-\frac{qr}{m}}{\delta^5}$	$\dfrac{\frac{a}{m}-\frac{qr}{m}}{\delta^6}$	$\dfrac{\frac{a}{m}-\frac{qr}{m}}{\delta^7}$	$\dfrac{\frac{a}{m}+\frac{m-1}{m}\times qr}{\delta^{2m}}$
n	$\dfrac{\frac{a}{m}-\frac{qr^{n-1}}{m}}{\delta^9}$	$\dfrac{\frac{a}{m}-\frac{qr^{n-1}}{m}}{\delta^{10}}$	$\dfrac{\frac{a}{m}-\frac{qr^{n-1}}{m}}{\delta^{11}}$	$\dfrac{\frac{a}{m}+\frac{m-1}{m}\times qr^{n-1}}{\delta^{mn}}$
Pela fracção $\frac{l}{k}$ do anno	$\dfrac{\frac{a}{m}-\frac{qr^n}{m}}{\delta^{mn+1}}$	$\dfrac{\frac{a}{m}-\frac{qr^n}{m}}{\delta^{mn+2}}$	Ultimo pagamento (segundo a formula (d) do § 8º), descontado: $\dfrac{\frac{a-qr^n}{t}\times\left(1+\frac{t}{m}\right)^{\frac{\lambda}{\varkappa}}}{\delta^{m\left(n+\frac{l}{k}\right)}}$	

Para obter a somma de todas estas quantidades descontadas, observe-se:

1.º—Que a quantidade $\frac{a}{m}$ é repetida tantas vezes quantos são os periodos completos $\frac{1}{m}$ do anno; e portanto, descontada por cada periodo, a somma é:

$$+\frac{a}{m}\times\frac{1-\delta^{-\left\{m\left(n+\frac{l}{k}\right)-\frac{\lambda}{\varkappa}\right\}}}{\delta-1}.$$

2.º—Que nos termos em que entra q, tomando cada columna só-

mente até o anno n, as quantidades $-\frac{q}{m}$, nas tres primeiras columnas e $+\frac{(m-1)q}{m}$, na quarta, achão-se multiplicadas por progressões cujos termos são formados de $\frac{r}{\delta}$: progredindo o *numerador* com o incremento 1 no expoente de cada termo, desde zero; e o *denominador* com o incremento m, desde 1 na primeira, desde 2 na segunda, desde 3 na terceira e desde m na m columna. Considerando como ultimo da progressão o primeiro termo em cada columna, a razão é $\frac{\delta^m}{r}$; e sommão:

$$1.^{a}\text{ columna: } -\frac{q}{m}\times\frac{\delta^{m-1}-\frac{r^n}{\delta^{mn-3}}}{\delta^m-r}$$

$$2.^{a}\text{ columna: } -\frac{q}{m}\times\frac{\delta^{m-2}-\frac{r^n}{\delta^{mn-2}}}{\delta^m-r}$$

$$3.^{a}\text{ columna: } -\frac{q}{m}\times\frac{\delta^{m-3}-\frac{r^n}{\delta^{mn-1}}}{\delta^m-r}$$

$$4.^{a}\text{ columna: } +\frac{(m-1)q}{m}\times\frac{1-\frac{r^n}{\delta^{mn}}}{\delta^m-r}$$

Nestas quantidades, se se tiver dividido a ultima por $(m-1)$, cada uma dellas, depois disto sendo multiplicada por δ, iguala a precedente (salvo os signaes).

Com estes dados, teremos a somma destas quatro quantidades:

$$-\frac{q}{m}\times\frac{1-\frac{r^n}{\delta^{mn}}}{\delta^m-r}\times\{(\delta+\delta^2\ldots+\delta^{m-1})-(m-1)\}\cdot$$

3.º—Que o valor actual dos termos (ultima linha horizontal) em que entra $\frac{qr^n}{m}$ (visto que os termos $\frac{a}{m}$ já forão tomados) nos pagamentos

de juros do capital pelas fracções de anno, menos o ultimo pagamento, é este:

$$-\frac{qr^n}{m}\times\frac{\frac{1}{\delta^{mn}}-\frac{1}{\delta^{m\left(n+\frac{l}{k}\right)-\frac{\lambda}{x}}}}{\delta-1}.$$

(O expoente $m\left(n+\frac{l}{k}\right)-\frac{\lambda}{x}$ explica-se por ser o primeiro termo o prazo total da amortização; e o segundo, a fracção do ultimo periodo de juro).

4.º—Que o valor actual do ultimo pagamento para completa extincção do capital e juros é este:

$$+\frac{\frac{a-qr^n}{t}\times\left(1+\frac{t}{m}\right)^{\frac{\lambda}{x}}}{\delta^{m\left(n+\frac{l}{k}\right)}}.$$

Formula.—Reunindo as quatro quantidades precedentes e substituindo a por α e q por p, teremos a formula geral para o presente valor de todos os pagamentos (sendo o resgate annual, e os juros em menores periodos) que deveráõ amortizar o capital 1 e seus juros, fazendo-se os descontos δ capitalizados cada $\frac{1}{m}$ do anno:

$$\frac{\alpha}{m}\times\frac{1-\delta^{-\left\{m\left(n+\frac{l}{k}\right)-\frac{\lambda}{x}\right\}}}{\delta-1}-\frac{p}{m}\times\frac{1-\frac{r^n}{\delta^{mn}}}{\delta^m-r}\times\left\{\left(\delta+\delta^2\ldots\ldots\ldots\ldots+\delta^{m-1}\right)-(m-1)\right\}$$

$$-\frac{pr^n}{m}\times\frac{\delta^{-mn}-\delta^{-\left\{m\left(n+\frac{l}{k}\right)-\frac{\lambda}{x}\right\}}}{\delta-1}+\frac{\frac{\alpha-pr^n}{t}\times\left(1+\frac{t}{m}\right)^{\frac{\lambda}{x}}}{\delta^{m\left(n+\frac{l}{k}\right)}}.$$

Note-se que no segundo termo desta quantidade, devem-se tomar no terceiro factor $(m-1)$ vezes δ com o expoente subindo de 1 até

$(m-1)$. Que no terceiro termo, se $\frac{\lambda}{x} = m\left(n+\frac{l}{k}\right)-mn$, este termo resolve-se em zero; porque ficão iguaes os expoentes de δ no numerador. E assim deve ser; porque em tal caso na equação (a) do § 8º, $x = 0$; isto é, que não ha pagamento de juro em fracção do ultimo anno antes do vencimento da amortização total.

E que tanto o terceiro termo como o quarto resolvem-se em zero, se $\frac{l}{k}$ fôr igual a zero; visto que neste caso $pr^n = \alpha$, e $\frac{\lambda}{x} = 0$.

Este ultimo facto se dá quando o periodo da amortização é numero inteiro de annos.

Quanto ao modo de determinar $\frac{\lambda}{x}$, veja-se a equação (a) *bis* do dito § 8º.

Exemplo. — *Uma annuidade de 33 por cento extingue capital e juros de 8 por cento em 3* $\frac{60743218}{100000000}$ *annos (3 annos e 222 dias, conta redonda); porque segundo a formula do § 3º,*

$$n = \frac{\log\left(\frac{.33}{.25}\right)}{\log 1.08} = \frac{.1205739312}{.0334237555} = 3.60743218.$$

Que o capital seja de Rs. 100:000$000, o juro pago aos trimestres, e a amortização annualmente; qual é o valor actual de todos os pagamentos, descontados a 10 por cento annuaes compostos aos trimestres?

Devendo a amortização completar-se no fim dos primeiros 222 dias do quarto anno, é evidente que o juro deverá ter sido pago nos dois primeiros trimestres. E' preciso pois determinar a fracção $\frac{\lambda}{x}$ de trimestre de que é devido juro do capital na occasião do vencimento do prazo da amortização: o que se obtem pela formula (a) do § 8º:

$$\frac{\lambda}{x} = \left\{0.60743218-\frac{2}{4}\right\}\times 4 = 0.42972872.$$

Portanto, o capital sendo 1,

$\alpha = 0.33$	$t = 0.08$	$\frac{l}{k} = 0.60743218$
$p = 0.25$	$m = 4$	$\frac{\lambda}{x} = 0.42972872$
$r = 1.08$	$n = 3$	$\delta = 1.025$

E, segundo a ultima formula, teremos o valor actual de todos os pagamentos descontados a 2 $^1/_2$ por cento por trimestre:

$$\left\{\frac{0.33}{4}\times\frac{1-(1.025)^{-14}}{0.025}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\left\{\frac{0.25}{4}\times\frac{1-(1.08)^3\times(1.025)^{-12}}{(1.025)^4-1.08}\times\left\{(1.025)+(1.025)^2+(1.025)^3-3\right\}\right\}\ldots\ldots$$

$$-\left(\frac{0.25\times(1.08)^3}{4}\times\frac{\frac{1}{(1.025)^{12}}-\frac{1}{(1.025)^{14}}}{0.025}\right)+\left(\frac{\frac{0.33-0.25\times(1.08)^3}{0.08}\times(1.02)^{0.12972872}}{(1.025)^{14.12972872}}\right)$$

Recorrendo ás Taboas I, II, VII e VIII, procederemos ao seguinte calculo:

1.º termo

log 0.33 =	$\bar{1}.518513940$
log $\{1-(1.025)^{-14}\}$ =	$\bar{1}.465788406$
Compl. log 4×0.025 =	1.000000000
log =	$\bar{1}.984302346$
Numero =	0.96450025

2.º termo

log 0.25 =	$\bar{1}.397940009$
log $(1.08)^3$ =	0.100271266
log $(1.025)^{-12}$ =	$\bar{1}.871313615$
log =	$\bar{1}.971584881$
Numero +	0.93666627
—	1.00000000
log 0.06333373 =	$\bar{2}.801635066$
log. $\{(1.025)+(1.025)^2+(1.025)^3-3\}$ =	$\bar{1}.183314339$
Compl. log 4 =	$\bar{1}.397940009$
Compl. log $\{(1.025)^4-(1.08)\}$ =	1.623187883
log =	$\bar{2}.404017306$
Numero =	0.02535230

3.º termo

$$\log .25 = \bar{1}.397940009$$
$$\log (1.08)^3 = 0.100271266$$
$$\log \{(1.025)^{-12} - (1.025)^{-14}\} = \bar{2}.554230900$$
$$\text{Compl. } \log (4 \times 0.025) = 1.000000000$$
$$\log = \bar{1}.052442175$$
$$\text{Numero} = 0.11283457$$

4.º termo

$$\log (.33 - .25 \times (1.08)^3) = \bar{2}.178170885$$
$$\log 0.42972872 = \bar{1}.633194386$$
$$\log (\log 1.02) = \bar{3}.934507125$$
$$\log = \bar{3}.567701505$$
$$\text{Numero} = \log (1.02)^{0.42972872} = 0.003695741$$
$$\text{Compl. } \log (0.08) = 1.096910013$$
$$\log 14.42972872 = 1.159258166$$
$$\log (\log 1.025) = \bar{2}.030351354$$
$$\log = \bar{1}.189609520$$
$$\text{Numero} = \log (1.025)^{14.42972872} = 0.154742469$$
$$\text{Compl. } \log (1.025)^{14.42972872} = \bar{1}.845257531$$
$$\log = \bar{1}.124034170$$
$$\text{Numero} = 0.13305591$$

Portanto,

$$0.96450025 - 0.02535230 - 0.11283457 + 0.13305591 = 0.95936929.$$

Que para o capital proposto, dá o valor actual:

Rs. 95:936$929.

Observe-se que para obter um numero de n *letras exactas, é preciso o logarithmo de* n+1 *decimaes.*

Prova

Anno	*Pagamento cada trimestre*		*Desconto de 2 ½ %*	*Valor actual*
1.º	1.º	2:000$000	$(1.025)^{-1}$	1:951$220
	2.º	2:000$000	$(1.025)^{-2}$	1:903$629
	3.º	2:000$000	$(1.025)^{-3}$	1:857$199
	4.º	27:000$000	$(1.025)^{-4}$	24:460$667
2.º	1.º	1:500$000	$(1.025)^{-5}$	1:325$781
	2.º	1:500$000	$(1.025)^{-6}$	1:293$445
	3.º	1:500$000	$(1.025)^{-7}$	1:261$898
	4.º	28:500$000	$(1.025)^{-8}$	23:391$277
3.º	1.º	960$000	$(1.025)^{-9}$	768$699
	2.º	960$000	$(1.025)^{-10}$	749$951
	3.º	960$000	$(1.025)^{-11}$	731$659
	4.º	30:120$000	$(1.025)^{-12}$	22:395$903
222 dias do 4.º	1.º	376$800	$(1.025)^{-13}$	273$338
	2.º	376$800	$(1.025)^{-14}$	266$672
	3.º (Saldo)	19:001$008	$(1.025)^{-14.4972872}$	13:305$591
			Somma Rs.	95:936$929

Observação.—Na pratica achar-se-ha talvez prolixo o calculo que a analyse rigorosa requer sobre a fracção do anno para complemento do periodo da amortização; póde-se porém evital-o convencionando pagar, por exemplo, ao terminar o numero inteiro de annos todo o saldo que então se achar devido. O valor actual dos pagamentos será neste caso igual aos dois primeiros termos da formula (annullando $\frac{l}{k}$ e $\frac{\lambda}{x}$), mais quantia devida no fim de n annos (equação (d) do § 5º), descontada por δ^{mn}.

Assim, na presente questão se se convencionar o pagamento de todo o saldo que se achar devido immediatamente depois de paga a amortização do 3º anno (n), obteremos o valor actual de todos os pagamentos ao mesmo desconto de 2 ½ % semestral:

1° termo (tomando 12 trimestres)..... = + 84:626$557
Menos o 2° termo ..... = — 2:535$229

82:091$328

Mais o saldo descontado, $\left(1-q.\frac{r^n-1}{t}\right)\delta^{-mn}$, = 14:008$593

Rs. 96:099$921

O que se pode verificar com o auxilio do quadro acima.

Outros exemplos: sendo o prazo da amortização numero inteiro de annos.

Para bem elucidar esta questão, visto que conhecendo-se bem a marcha das operações, as formulas precedentes são de facil comprehensão, supponhamos ainda que uma Empresa levanta um emprestimo de 100 contos a juro de 5 $^1/_2$ por cento pago aos semestres para ser amortizado em 4 annos.

A annuidade a nestas condições acha-se pela equação (e) do § 9°, Secç. II.

$$a = 100{:}000\$000 \times \frac{0.055}{1-(1.055)^{-4}} = 28{:}529\$449.$$

Valor que se pode obter pela Tab. VI no alinhamento de 4, columna 5 $^1/_2$ $^0/_0$.

Destes 28:529$449 réis a Empresa paga 5 $^1/_2$ por cento de juros (por metade em cada semestre) do capital que se achar por amortizar, isto é, devido, e o restante no fim de cada anno para amortização.

Examinemos os dois casos seguintes:

1.° A Empresa não pode fazer a emissão do emprestimo senão descontando na razão de 6 $^0/_0$ annuaes os seus pagamentos futuros.

2.° A Empresa pode fazer a emissão descontando a 5 por cento.

No 1° caso ha um rebate no preço das obrigações.

No 2° ha um premio.

Tomando a formula geral precedente, os dois ultimos termos resolvem-se em zero, porque aqui $\frac{l}{k} = 0$. No segundo termo, pondo q em lugar de p, e recordando que $qr^n = a$ temos:

$$\frac{a}{m}\times\left\{\frac{1-\delta^{-mn}}{\delta-1}-\frac{\frac{1}{r^n}-\frac{1}{\delta^{mn}}}{\delta^m-r}\times\{\delta-(m-1)\}\right\}.$$

QUESTÃO I.—*Qual é o valor actual que no 1° caso, isto é, emittindo com 6 % de desconto, resulta á Empresa?*

Segundo a proposta, faremos na formula acima

$$\left|\begin{array}{l} a = 28529449 \\ m = 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} n = 4 \\ \delta = 1.03 \end{array}\left| \begin{array}{l} r = 1.055 \\ \\ \end{array}\right|$$

Tomando nas Taboas V e I os valores indicados, acharemos:

$$\frac{28529449}{2}\times\left\{7.01969219-\frac{\left(\frac{1}{1.23882465}-\frac{1}{1.26677008}\right)\times 0.03}{1.0609-1.055}\right\}.$$

Eis aqui o calculo:

$$P_8 \text{ (Tab. V col. 3 \%)} = 7.01969219$$
$$\frac{(0.80721674-0.78940923)\times 0.03}{0.0059} = \frac{0.09054666}{6.92914553}$$

Donde

$$14264724{,}5\times 6.92914553 = \text{Rs. } 98{:}842\$352$$

valor que resulta da emissão de 100:000$000 nominaes.

QUESTÃO II.—*Qual é o valor actual que no 2° caso, isto é, emittindo com 5 % de desconto, resulta á Empresa?*

Na formula precedente faremos $\delta = 1.025$, conservando os outros valores da 1ª questão; e portanto,

$$\frac{28529449}{2}\times\left\{7.17013717-\frac{\{0.80721674-0.82074657\}\times 0.025}{1.050625-1.055}\right\}\ldots\ldots\ldots$$

$$= 14264724{,}5\times\left\{7.17013717-\frac{-0.00033824575}{-0.004375}\right. = \text{Rs. } 101{:}177\$178$$

que se obtem pela emissão de 100 contos nominaes.

Quadro das operações

Anno	*Pagamento cada semestre*		*Valor descontado a 3 % por semestre*	*Valor descontado a 2 1/2 % por semestre*
1.º	1.º	2:750$000	2:669$903	2:682$927
	2.º	25:779$449	24:299$603	24:537$251
2.º	1.º	2:116$690	1:937$071	1:965$557
	2.º	26:412$759	23:467$394	23:928$656
3.º	1.º	1:448$548	1:249$530	1:280$305
	2.º	27:080$901	22:679$829	23:351$776
4.º	1.º	743$659	604$663	625$614
	2.º	27:785$790	21:934$359	22:805$092
		Somma	98:842$352	101:177$178

Valores iguaes aos que se achárão pelas formulas.

Por tudo o que precede se vê quanto importa evitar que o prazo da amortização seja um *numero fraccionario* de annos, que complica extremamente os calculos.

§ XII.—PREMIO DE SORTEIO.—LEVANTAMENTO DE EMPRESTIMO.—NUMERO E PREÇO DE EMISSÃO DAS OBRIGAÇÕES.

As empresas mutuarias destinão ordinariamente um premio ás primeiras obrigações sorteadas annualmente. Se este premio não é condição do contrato mas somente uma promessa no caso de haver sobras, pouco ou nada pode influir no valor actual das obrigações; porem se o premio é condição obrigatoria do contrato, é necessario leval-o em conta no valor actual.

Vamos estabelecer uma hypothese.

EXEMPLO.—*A Empresa de uma via-ferrea pretende levantar um emprestimo de 5.000:000$000 réis, emittindo obrigações do valor de 100$000 réis cada uma, as quaes venceráõ o juro de 6 por cento ao anno pago aos semestres; e serão resgatadas por sorteio annual no prazo de 40 annos. As primeiras 5 obrigações sorteadas em cada anno terão premios na importancia, todos juntos, de 10:000$000.*

Um banqueiro adianta capitaes e toma a si a emissão das obrigações, mediante o desconto de 7 por cento de todos os pagamentos futuros.

Para realizar a transacção, quantas obrigações deve a Empresa emittir, e porque preço?

Em primeiro lugar determinaremos pela formula (*c*) do § 2º desta Secç., a porcentagem precisa para extinguir um capital e juros em 40 annos, e acharemos ser de 0.06646154; sendo, segundo a hypothese, 0.06 de juro e 0.00646154 para amortização. Portanto uma annuidade de 6$646 $\frac{154}{1000}$ amortizará uma obrigação de 100$000.

O valor actual de uma obrigação de 100$000 que tem de ser amortizada em 40 annos, juros de 6 % aos semestres e os descontos a 7 %, acha-se pela formula geral do § precedente, observando-se que pela razão de ser neste caso o periodo da amortização numero inteiro de annos, os dois ultimos termos resolvem-se em zero; e que no segundo termo (veja-se a equação (*b*) do § 2º), pode pôr-se a por qr^n, empregando a annuidade e quota effectivos, $a = \alpha \times M$ e $q = p \times M$. (Aqui $M =$ 100$000). Teremos:

$$\frac{a}{m} \times \frac{1-\delta^{-mn}}{\delta-1} - \frac{a}{m} \times \frac{r^{-n}-\delta^{-mn}}{\delta^m - r} \times \{\delta-(m-1)\}$$

Pela proposta,

$$\left| \begin{array}{l} a = 6646{,}154 \\ m = 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} n = 40 \\ r = 1.06 \end{array} \left| \delta = 1.035 \right|$$

Substituindo estes valores na quantidade acima, obtem-se:

$$\frac{6646{,}154}{2} \times \left\{ \frac{1-(1.035)^{-80}}{0.035} - \frac{\{(1.06)^{-40}-(1.035)^{-80}\} \times 0{,}035}{1.071225-1.06} \right\}.$$

Com as Taboas V e II, procederemos:

$$P_{80} = 26.74877567$$

$$\log \{[0.09722219-0.06379285] \times 0.035\} = \bar{3}.0681959$$

$$\text{Compl. } \log (1.071225-1.06) = 1.9498137$$

$$\log = \bar{1}.0180096$$

$$\text{Numero} = 1.10423404$$

$$\text{Numero} = 25.64454163$$

$$\log = 1.4256082$$
$$\log\left(\frac{6646.154}{2}\right) = 3.5215404$$
$$\log = 4.9471486$$
$$\text{Numero} = 88541{,}86$$

Portanto, Rs. 88$542 é o valor actual de 1 obrigação, menos o premio de sorteio.

Pela equação (*a*) do § 3º, Secç. II, determina-se o presente valor dos premios de sorteio em 40 annos; e acha-se:

$$10{:}000\$000 \times \frac{1-(1.035)^{-80}}{(1.035)^2-1} = 131{:}443\$615 \text{ réis.}$$

Esta importancia deve ser repartida pelo numero de obrigações a emittir; porque nessa proporção lhes augmenta o valor. Que o numero das obrigações seja x. Como o capital de que carece a Empresa é de 5.000:000$000 réis, teremos:

$$5.000{:}000\$000 = x\left(88\$542 + \frac{131{:}443\$615}{x}\right)$$

Donde se tira,

$$x = 54985{,}84.$$

Deve pois a Empresa emittir 54986 obrigações do valor nominal de 100$000 réis, ao preço de 90$932, que produziráõ Rs. 4.999:986$952, por causa da pequena fracção de preço que não póde deixar de se omittir.

Calculemos agora o numero e o valor das obrigações a emittir no caso em que circumstancias favoraveis habilitassem a Empresa a fazer a emissão com premio sobre o valor nominal de cada obrigação. *Supponhamos que podesse obter o valor actual com o desconto de 5 1/2 por cento annuaes de todos os pagamentos futuros.*

Tomando a formula do caso precedente, faremos $\delta = 1.0275$, conservando os outros valores. Portanto,

$$\frac{6646.154}{2} \times \left\{ \frac{1-\frac{1}{(1.0275)^{80}}}{0.0275} - \frac{\left\{\frac{1}{(1.06)^{40}} - \frac{1}{(1.0275)^{80}}\right\} \times 0.0275}{(1.0275)^2-1.06} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 3323.077 \times \left\{ 32.21294561 - \frac{(0.09722219-0.11414412) \times 0.0275}{1.05575625-1.06} \right\} \ldots\ldots\ldots$$

= Rs. 106$682, preço de 1 obrigação menos o premio de sorteio.

O valor actual de 10:000$000 annuaes para premio de sorteio, em 40 annos, com desconto de 5 $^1/_2$ % annuaes compostos aos semestres (formula(c) do § 5.º, Secç. II), é :

$$10{:}000\$000 \times \frac{1-\frac{1}{(1.0275)^{80}}}{(1.0275)^2-1} = 10{:}000\$000 \times \frac{.88585588}{.05575625} = \text{Rs. } 158{:}880\$104$$

valor actual.

Tem-se o numero x de obrigações :

$$5.000{:}000\$000 = x\left\{106\$682 + \frac{158{:}880\$104}{x}\right\}$$

$$x = \frac{4841119896}{106682} = 45378{,}97.$$

O valor actual do preço de sorteio afferente a cada obrigação é:

$$\frac{158880104}{45379} = 3\$501.$$

Portanto, a Empresa deverá emittir 45379 obrigações do valor nominal de 100$000, ao preço de 110$183 cada uma, que produzirão Rs. 4.999:994$357.

Se os descontos fossem á mesma taxa do juro que paga a Empresa, o preço das obrigações seria ao par, salvo o premio de sorteio ; o que póde verificar-se fazendo na formula precedente $\delta = 1.03$, como segue:

$$\frac{6646{,}154}{2} \times \left\{\frac{1-(1.03)^{-80}}{0.03} - \frac{\{(1.06)^{-40}-(1.03)^{-80}\}\times 0.03}{(1.03)^2-1.06}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 3323.077 \times 30.09259379 = \text{Rs. } 100\$000, \text{ preço igual ao valor nominal.}$$

§ XIII.— JURO QUE RESULTA Á EMPRESA DA EMISSÃO DE OBRIGAÇÕES COM DESCONTO OU COM PREMIO

Por uma obrigação de 100$000 réis valor nominal, segundo a hypothese do primeiro caso do § antecedente, a Empresa recebe 90$932, sendo 2$390 pela respectiva parte dos premios de sorteio, descontados a 7 por cento. Pelos restantes 88$542, a Empresa deverá pagar durante

40 annos a annuidade de 6$646, incluindo juro e amortização. E' evidente que a Empreza pagará um juro maior do que 6 %.

Se se tratar de saber qual é a taxa de juro que a Empreza realmente paga, póde-se determinal-a por qualquer dos methodos expostos no § 8° da Secç. II.

Na pratica ordinaria, obtem-se pelos mais simples daquelles methodos sufficiente approximação. Se porem se precisar de grande approximação com muitas decimaes, recorrer-se-ha á equação (*c*) *bis* do mesmo §.

Tambem se póde empregar a equação (*a*) do § 2° desta Secç.

$$r^n = \frac{\alpha}{p},$$

fazendo uso dos logarithmos.

Como α é dado por $\frac{a}{M}$, que neste caso é (§ precedente)

$$\frac{6646,154}{88541,860} = 0,07506228,$$

torna-se sensivel qualquer precisa alteração em p e r, para satisfazer á equação seguinte (comtanto que $r-1+p=\alpha$):

$$n.\log r+\log p = \log \alpha.$$

Este methodo tambem pode applicar-se aos casos do § 8° Secç. II.

No caso que nos occupa, sendo $n=40$ e $\alpha=0.07506228$, logo se vê na Tab. VI, columna 7 % que o juro deve ser muito pouco mais do que esta taxa; e então com o auxilio da equação precedente, acharemos $r=1.070061012$; pois que,

$$40\times\log 1,070061012+\log 0,005001268 = \log 0,07506228.$$

Isto é,

$$1.1763416+\bar{3}.6990801 = \bar{2}.8754217.$$

A Empresa paga portanto:

De juro (*t*)..... 7,0061012 por cento.
De amortização (*p*)..... 0,5001268 idem.

Effectivamente a Empresa paga annualmente:

7.0061012 % de 88$542	=	6$203
0.5001268 % idem	=	$443
		6$646

Mas verifiquemos se esta quota a este juro amortiza o emprestimo nos 40 annos.

Tomando a equação (a) do § 1°, teremos neste caso:

$$M = 88541.86\,;\quad q = 442.8216\,;$$
$$r = 1.070061012\,;\quad n = 40.$$

E acharemos:

$$88541.86 = 442.8216 \times \frac{15.00864900 - 1}{0.070061012}.$$

O que serve de prova do juro achado.

Se se quizesse tambem levar em conta o premio de sorteio, tomando o 1° caso do § precedente, veriamos que a Empresa recebe 4.999:986$952 réis pelas 54986 obrigações, e tem de pagar durante 40 annos:

Obrigações	annuidade	
54986	× 6$636 =	365:436$956
Premio de sorteio =		10:000$000
	Rs.	375:436$956

E' esta a annuidade a; e acharemos x:

$$x = \frac{a}{M} = \frac{375436956}{4999986952} = 0.07508759.$$

Que pela Tab. VI se vê que corresponde ao juro de pouco mais de 7 %.

Na hypothese do 2° caso do § antecedente, a Empresa recebe 106$682 réis por cada obrigação (não levando em conta o premio de sorteio); e para amortização de capital e juro, tem de pagar annualmente 6$646, que amortizarião 100$000 a 6 %; portanto, o juro real será menor que esta taxa.

Neste caso, temos:

$$x = \frac{6646}{106682} = 0.06229729\,;\quad n = 40\,;$$

que na Taboa VI se vê ser muito pouco mais do que á taxa de 5 ½ por cento, podendo-se determinar com a approximação que se desejar pelos processos expostos.]

§ XIV.—JURO QUE RESULTA DA COMPRA DE UMA OBRIGAÇÃO COM DESCONTO OU COM PREMIO. ÉPOCA DO REEMBOLSO, OU PREÇO DA COMPRA, PARA OBTER CERTO PREMIO.

Decorre da precedente est'outra questão de saber que juro resulta a um particular que adquire uma obrigação abaixo ou acima do par.

Sendo

C, o preço da compra;

R, o reembolso, ou valor nominal da obrigação;

T, o juro effectivo pago cada $\frac{1}{m}$ do anno pela Empresa á taxa t annual;

v, o numero de annos no fim dos quaes tem lugar o reembolso depois da compra;

τ, a taxa de juro afferente a cada periodo $\frac{1}{m}$, que resulta ao adquirente; e

$\rho = 1+\tau$,

tem-se a equação:

$$C\times\rho^{mv} = T\times\frac{\rho^{mv}-1}{\tau}+R. \qquad (a)$$

Note-se:

Se $C=R$, isto é, se a compra é ao par, o juro resultante ao adquirente é á mesma taxa do que paga a Empresa: $\tau = \frac{T}{R} = \frac{t}{m}$.

Se $C<R$, isto é, se a compra é com desconto, o excesso da importancia do reembolso sobre a da compra é formado pela differença do juro da compra, τC, sobre o juro effectivo, T. Esta differença, visto ser relativa ao excesso repartido pelo numero de annos v, será tanto mais consideravel, quanto v fôr menor; e tanto menos consideravel quanto v fôr maior: dando-se o minimo quando v coincidir com a terminação do prazo total da amortização. Portanto, a taxa do juro resultante da compra é maior do que a taxa que paga a Empresa; e é tanto mais consideravel quanto mais proximamente fôr sorteada a obrigação.

Se $C>R$, isto é, se a compra fôr com premio, a taxa do juro será reduzida. A reducção será tanto maior quanto fôr menor o numero de annos v, e *vice-versa*.

Resumindo, temos :

Se $C = R$, $\tau = \frac{T}{C}$.

Se $C < R$, $\tau > \frac{T}{R}$: e tambem, $\tau > \frac{T}{C}$; porque, τC comprehende T e uma parte que hade compor o excesso do reembolso.

Se $C > R$, $\tau < \frac{T}{R}$: e tambem, $\tau < \frac{T}{C}$; porque T comprehende τC, e uma parte que amortiza o excesso da compra.

A differença entre C e R será relativamente tanto menos influente sobre τ, quanto ν fôr maior.

Estas observações prestaráõ grande auxilio para a determinação da taxa do juro, visto não haver um meio directo e simples de a obter.

Algumas tentativas sobre a equação (*a*) faráõ conhecer o valor de ρ; e com facilidade um valor approximado (principalmente se se tiverem taboas de diversas taxas que o comprehendão). Para estas tentativas convém notar, que se o valor da compra com o juro assumido (lado esquerdo da equação) fôr maior do que a cobrança periodica T com seus juros mais o reembolso (lado direito), é porque a taxa assumida é mais forte do que deve ser : e se aquelle valor fôr menor, é porque a taxa é fraca de mais.

E' este o methodo que melhor se coaduna com o expediente prompto que reclama o commercio.

Se por exemplo, se tiver comprado uma obrigação de 100$000 nominaes por 80$000, devendo receber-se 3$000 cada semestre, achar-se-ha, com o auxilio da Tab. I, que sendo sorteada a obrigação no fim de 3 annos, o juro resultante será entre 7 e 7 $^1/_4$ por cento semestral. Effectivamente, ver-se-ha adiante que o juro é $7\frac{22512}{100000}$ %.

Se acontecer que a obrigação só seja sorteada no fim de 20 annos, achar-se-ha facilmente com as Taboas I e IV, que o juro resultante é muito pouco mais de 4 % semestral.

Com effeito, tomando a Tab. I, o preço da compra no fim de 40 semestres a 4 % attingirá :

$$80000 \times 4.80102 = \text{Rs. } 384\$082.$$

E o pagamento semestral (tomando a Tab. IV), com o reembolso :

$$3000 \times 95.0255 + 100000 = \text{Rs. } 385\$076.$$

Cuja differença é bem pequena.

Para nada omittir porem apresentarei um methodo que, apezar de muito laborioso, se poderá empregar quando se exija grande exactidão; ou tambem quando na falta de taboas, o primeiro methodo se torne menos facil.

Façamos na equação (*a*) que precede,

$$\rho = \delta + x, \text{ e } \delta = 1 + \varphi;$$

d'ahi,

$$\tau = \varphi + x.$$

Arbitrando, pelos dados da questão, de accôrdo com as observações precedentes, uma taxa provavel representada por φ, a dita equação (*a*) converte-se nesta:

$$(\delta + x)^{m\nu} + \frac{T - (\varphi + x)R}{(\varphi + x)C - T} = 0.$$

Desenvolvendo o binomio $(\delta + x)^{m\nu}$, e tomando sómente os dois primeiros termos do desenvolvimento (§ 8º Secç. II), resulta:

$$x^2 + \frac{C\delta^{m\nu} + m\nu.(\varphi C - T)\delta^{m\nu-1} - R}{m\nu.C\delta^{m\nu-1}} \times x = \frac{\varphi R - (\varphi C - T)\delta^{m\nu} - T}{m\nu.C\delta^{m\nu-1}}. \qquad (b)$$

Se para abreviar fizermos o coefficiente de x igual a F, e o segundo membro, da equação igual a U, teremos:

$$x = -\frac{F}{2} + \sqrt{\left(\frac{F}{2}\right)^2 + U}. \qquad (c)$$

Addicionando este valor a φ, obteremos muito approximadamente a taxa do juro resultante da operação.

COMPRA COM DESCONTO.

Tomemos o caso precedente de uma obrigação de 100$000 réis nominaes comprada por 80$000, e devendo receber-se 3$000 cada semestre. Qual é o juro resultante segundo as equações (b) e (c), sendo a obrigação sorteada 3 annos depois da compra?

Suppondo que a taxa semestral seja $7\,^1/_4\,^0/_0$, tem-se:

$$\left|\begin{array}{l} \rho = 0{,}0725 \\ C = 80000 \end{array}\right| \begin{array}{l} R = 100000 \\ T = 3000 \end{array} \left|\begin{array}{l} m = 2 \\ \nu = 3 \end{array}\right|$$

Na equação (c),

$$F = \frac{80000 \times (1.0725)^6 + 6 \times (5800 - 3000) \times (1.0725)^5 - 100000}{6 \times 80000 \times (1.0725)^5} = 0.06693438.$$

$$U = \frac{7250 - 2800 \times (1.0725)^6 - 3000}{6 \times 80000 \times (1.0725)^5} = -0.0000165862.$$

Portanto,

$$x = -0.03346719 + \sqrt{0.0011200528 - 0.0000165862} = -0.00024872.$$

Subtrahindo este valor da taxa assumida, obtem-se a taxa semestral de $7\frac{225128}{1000000}$ por cento, exacta até á setima decimal, como se vai ver pela formula (a) que fornece a prova:

$$80000 \times (1.0722512)^6 = 3000 \times \frac{(1.0722512)^6}{0.0722512} + 100000 = \text{Rs. } 121\$582.$$

COMPRA COM PREMIO

Uma obrigação do valor nominal de 100$000 réis comprando-se por 110$000, e devendo receber-se 3$500 cada semestre (7 por cento ao anno), qual é o juro resultante, sendo a obrigação sorteada 5 annos depois da compra?

Procure-se a taxa approximada por meio da equação (a).

Aqui,

$$C = 110000;\ T = 3500;\ R = 100000;\ m = 2;\ \nu = 5.$$

Acharemos promptamente que o valor mais approximado de τ, que se obtem pela Tab. I, é $2\,^3/_8$ por cento (muito pouco mais forte do que deve ser). Com effeito,

$$C \times \rho^{10} = 110000 \times 1.26455915 = \text{Rs. } 139\$102.$$

E a cobrança e reembolso:

$$3500 \times \frac{0.26455915}{0.02375} + 100000 = \text{Rs. } 138\$988.$$

Cuja differença é muito pequena.

Portanto o juro annual é de $4\,{}^3/_4$ por cento.

O juro mais approximado é $2\frac{365}{1000}$ por cento (desprezando maior numero de decimaes), que se obtem pela formula (*b*) fazendo nella $\varphi = 0{,}025$: o que dá para x uma quantidade negativa, e esse resultado.

Se o sorteio só tivesse lugar no fim de 20 annos, acharia-se o juro semestral de $3\frac{1}{12}$ por cento (bastante approximado), tomando na Tab. VII o respectivo logarithmo.

Porquanto,

$$40 \times \log\,(1.030833\ldots) = 0.527538144$$
$$\text{Numero} = 3.369287$$

Tem-se o preço da compra com o juro:

$$110000 \times 3.369287 = \text{Rs. } 370\$622.$$

E a cobrança e reembolso:

$$3500 \times \frac{2.369287}{0.030833\ldots} + 100000 = \text{Rs. } 368\$946.$$

Resulta o juro *annual* de $6\,{}^1/_6$ por cento.

Por meio da equação (*b*) obtem-se a taxa semestral de $3\frac{629}{10000}$ por cento, que é quasi exacta.

ÉPOCA PRECISA DO REEMBOLSO PARA OBTER CERTO JURO.

Da equação (*a*) resulta

$$m\nu = \frac{\log\left(\frac{\tau R - T}{\tau C - T}\right)}{\log \rho},$$

que responde á questão, tomando as notações do principio deste §.

E' preciso recordar que na compra com desconto, τC deve ser

maior que T; e na compra com premio, deve ser menor: de que resulta que o numerador e denominador do dividendo teráõ o mesmo signal, e poderáõ sempre tomar-se como positivos.

EXEMPLO.—*Seja o caso precedente da compra com 10 por cento de premio, devendo receber-se 3 1/2 por cento do valor nominal cada semestre: no fim de que prazo é preciso que tenha lugar o reembolso para se obter 5 1/2 por cento de juro ao anno?*

Na equação acima ρ e τ, referindo-se a semestres, igualaráõ, pela proposta, 1,0275 e 0,0275, e $m = 2$; portanto,

$$2\nu = \frac{\log 0.750 - \log 0,475}{\log 1.0275} = 16.83679.$$

E' preciso que o sorteio tenha lugar passados 8 annos e 151 dias.

PREÇO DA COMPRA PARA OBTER CERTO JURO, SUPPOSTA A ÉPOCA DO REEMBOLSO.

Da equação (a) resulta:

$$C = \frac{T - \rho^{-m\nu}(T - \tau R)}{\tau}.$$

EXEMPLO.—*Suppondo que no fim de 10 annos será sorteada uma obrigação de 100$000 réis nominaes, pela qual se receberá cada semestre 3$500; porque preço se deve comprar para que renda o juro annual de 8 por cento?*

ρ e τ, referindo-se a semestres, igualão 1,04 e 0,04; e $m\nu$ iguala 20 Portanto,

$$C = \frac{3500 + 228,19}{0,04} = 93205.$$

Póde-se verificar pela formula (a) que 93$205 com os juros de 4 % em 20 semestres importão 204$223, o mesmo que 3$500 cada semestre mais o reembolso.

Com estes dados e a doutrina do § 10, póde-se formar juizo seguro sobre a vantagem ou desvantagem da compra [1].

---

[1] O abuso da *agiotagem* é mais abominavel do que o da *usura*, porque os seus effeitos são desastrosos em mais vasto campo. Os nossos antepassados, que tanto exprobrárão a *usura*, que dirião elles hoje se presenciassem os escandalosos abusos e ciladas da *agiotagem*, que

§ XV.—EMPRESTIMOS COM AMORTIZAÇÃO A PARTICULARES.

O reembolso de emprestimos a longo prazo por meio de amortização, que até aqui temos considerado como contrahidos pelas grandes empresas, não é de menos proveitosa applicação nos emprestimos a particulares, sobretudo para a industria agricola.

A amortização pode fazer-se por meio de uma annuidade paga por inteiro, ou por fracções em correspondentes periodos do anno, durante o prazo ajustado. O regulamento á *lei de 3 de Junho de 1865*, sobre as sociedades de credito real estatue que as annuidades sejão pagas por semestres (1). Devia-se portanto calcular a annuidade pela formula (*c*) do § 6º da Secç. II; mas em lugar disto, calculão a annuidade a receber no fim do anno por inteiro, e fazem-na pagar por metade em cada semestre, o que é um tanto desfavoravel ao mutuario (2). Como é esta a pratica estabelecida, os calculos seguintes são

---

tanto deshonrão o commercio nos tempos modernos, e tão grandes calamidades ás vezes occasionão?

Il ne faut pas gouverner trop les hommes, disse um economista. Se, consoante a isto, hoje reconhecemos que muitas vezes leis repressivas produzem mais males do que bens, comtudo a legislação moderna não deixa de condemnar a *agiotagem*, declarando culposa a fallencia que a tenha por causa. « *Des opérations fictives de bourse* », diz o codigo commercial francez, artigo 585, n. 2. «...*operaciones de agiotage, cuyo éxito dependa absolutamente del azar* », diz o codigo hespanhol, artigo 1005, n. 3. Os codigos, brazileiro artigo 800, n. 2, e portuguez n. 1147, § 3º, ainda são mais positivos, declarando sem restricções culposa a fallencia que provenha de « *especulações de aposta ou agiotagem* »

(1) Esta disposição do regulamento não está na lei, a qual não determina que as annuidades sejão pagas por inteiro ou por fracções.

Outra disposição do regulamento, que não vem na lei, é a de deduzir-se, no acto do contrato, da quantia mutuada a annuidade relativa ao semestre corrente: de sorte que o mutuario fica pagando juros *e amortização* sobre maior quantia do que a que recebe. Este simples enunciado dispensa commentarios.

Uma epoca commum para a cobrança das annuidades de todos os mutuarios n'uma empresa de credito real é inconveniente, porque altera os prazos e por consequencia os valores, e traz agglomeração de trabalho que devia ser repartido por todo o anno nas differentes epocas de cada contrato. A communidade da epoca da cobrança não é necessaria para a determinação do valor das letras hypothecarias a resgatar. Cada mutuario deve ter a sua conta que mostre em toda a occasião quanto está devendo do capital emprestado; portanto, a somma desses saldos limitará a somma das letras que devem ficar em circulação.

(2) A annuidade *a*, para que seja paga semestralmente, deve importar cada pagamento $\frac{a}{r^{1/2}+1}$; de que resulta no fim do prazo a mesma quantia; como se demonstra pondo esta

nesta conformidade; alem de que as regras para o calculo de pagamentos semestraes são as mesmas, salvo o tomar-se para unidade de tempo *o semestre*, que é o intervallo entre dois pagamentos consecutivos, e attribuir-se-lhe o juro segundo as regras do dito paragrapho 6º. Entretanto, a NOTA no fim do seguinte § 16 apresenta as mesmas proposições do § resolvidas segundo a condição do juro annual pago conjuntamente com amortização semestral: para o caso em que nos resolvamos a fazer as coisas como devem ser feitas.

A annuidade, que deve compor-se do juro do capital e da quota para amortização, pode de ante-mão determinar-se que seja tantos por cento do capital; e então calcula-se em quantos annos ella deve completar a amortização. Pela equação (*c*) do § 7º, Secç. II, determina-se o numero n de annos para a amortização, sendo A o capital mutuado, e a a annuidade ajustada de tantos por cento do capital.

Mas este modo tem o inconveniente de ser quasi sempre o numero n fraccionario, cuja analyse se fez nos §§ 3º e 4º desta Secç. Para evitar este inconveniente, assume-se o prazo de um numero inteiro de annos em que deva effectuar-se a amortização, e calcula-se depois com o juro ajustado, pela equação (*e*) do § 9º da Secç. II, o valor da annuidade a.

A equação (*g*) do mesmo § indica de quantos por cento do capital é a annuidade: se esta porcentagem se representar por α, podemos dizer que a annuidade a pagar compõe-se do juro á taxa t, e da amortização $(\alpha - t)$ do capital; que no exemplo á mesma formula é 5 por cento de juro, e $7\frac{9504574}{10000000}$ por cento de amortização.

Veja-se o § 2º desta Secção.

Se entretanto se tiver tomado um numero fraccionario de annos para periodo da amortização, o ultimo pagamento pela fracção, para reembolso do capital e juros, acha-se pela formula (*d*) do § 8º desta Secção.

---

expressão em logar de $\frac{a}{m}$ na equação (*k*) do § 4º da Secção II:

$$\frac{a}{r^{1/2}+1} \times \frac{r^n-1}{r^{1/2}-1} = a \times \frac{r^n-1}{r-1}$$

Logo, o pagamento de $\frac{a}{2}$ cada semestre é em detrimento do mutuario, visto que $r^{1/2}+1>2$.

§ XVI.—PAGAMENTO ANTECIPADO (RESGATE). AUGMENTO DO CAPITAL PRIMITIVAMENTE EMPRESTADO.

E' licito ao mutuario remir em qualquer epoca a sua divida, isto é, o capital que falta amortizar: a isto se chama *fazer o pagamento antecipado.*

Achar-se-ha o valor deste pagamento pelas formulas do § 5º desta Secç.

EXEMPLO.—*Se se tiver emprestado a quantia de 10 contos de réis para ser amortizada em 20 annos com o juro de 8 por cento ao anno, e que passados 10 annos o mutuario queira fazer o pagamento antecipado do que resta a dever, teremos:*

$$n = 20\,;\ n' = 10\,;\ r = 1.08.$$

Portanto, segundo a formula (*f*) do § 5º, será o valor do pagamento antecipado:

$$10{:}000\$000 \times \frac{(1.08)^{20}-(1.08)^{10}}{(1.08)^{20}-1} = \text{Rs. } 6{:}834\$366.$$

O que facilmente se obtem por meio da Tab. I onde se achão as quantidades r^n e $r^{n'}$.

Este pagamento antecipado é evidentemente o valor actual das $(n-n')$ annuidades a que o mutuario tem a pagar. Este valor actual é, pela equação (*a*) do § 3º da Secç. II (dividindo a, e multiplicando o seu factor, por r^n, e substituindo n por $(n-n')$),

$$\frac{a}{r^n} \times \frac{r^n - r^{n'}}{t}\,;$$

mas $\frac{a}{r^n} = q$, como se demonstrou no § 2º desta Secç.; e tomando em lugar de q, a sua relação ao capital (§ 1º), obtem-se a mesma formula da equação (*e*) do § 5º.

$$p \times \frac{r^n - r^{n'}}{t}.$$

Seja portanto, na presente questão, que em lugar do capital mutuado, se desse a annuidade de 1:018$522 que o amortiza no mesmo prazo ao mesmo juro. Pela formula (*b*) do § 3º da Secç. II, e tomando na Tab. V o valor indicado, teriamos;

$$1018522 \times 6.7100814 = \text{Rs. } 6{:}834\$366.$$

Que é o mesmo resultado.

Tambem deve ser licito ao mutuario antecipar, em qualquer época, somente uma parte do capital que falta amortizar, ou pagar por conta uma quantia certa. Nestes casos é necessario determinar a quanto fica reduzida a annuidade futura que deverá amortizar o resto devido.

Se se quizer antecipar uma parte $\frac{l}{k}$ do capital devido, é evidente que a annuidade ficará reduzida a

$$a_n - \frac{l}{k} a_n = \frac{k-l}{k} a_n. \qquad (a)$$

No caso de antecipar-se uma quantia certa Q, pode determinar-se a relação de Q ao capital que falta amortizar, pondo esta relação na formula acima em lugar de $\frac{l}{k}$.

Outro modo de determinar o valor a que fica reduzida a annuidade (e que convem empregar quando o pagamento não é uma fracção simples do capital), é calcular a annuidade precisa para amortizar, no resto do tempo que falta, o saldo do capital que fica devido depois de pago Q.

Pela formula (h) do § 5°, vê-se que a parte do capital M que falta amortizar passados n' annos é

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-n'}} \times M;$$

e, recordando o que se disse no § 2° a respeito dos valores de α (dados pela Tab. VI), achar-se-ha para valor da annuidade que amortizará o saldo pelo tempo que falta:

$$\alpha_{n-n'} \times \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-n'}} M - Q \right).$$

Donde se tira (recordando que $\alpha_n M = a_n$):

$$a_n - \alpha_{n-n'} \times Q. \qquad (b)$$

Exemplos.—Tomemos a hypothese precedente.

A annuidade que amortiza o capital de 10:000$000 réis e juros

de 8 % em 20 annos é 1:018$522 (equação (e) *do § 9º, Secç. II). Supponhamos que o mutuario quer, no fim de 10 annos, remir um terço da divida que falta amortizar.* Deverá pagar por antecipação:

$$\frac{1}{3}\times 6:834\$366 = 2:278\$122\ ;$$

e a annuidade até completar os 20 annos ficará reduzida (equação (*a*) deste §) a:

$$\frac{2}{3}\times 1:018\$522 = \text{Rs. } 679\$015.$$

Supponhamos ainda que no fim de 10 annos o mutuario paga a quantia de 2:278$122 por conta da sua divida. Com a Taboa que dê os valores de α (Tab. VI), determina-se o valor a que fica reduzida a annuidade até completar o prazo.

Acha-se na Taboa:

$$\alpha_{20} = 0.10185221$$
$$\alpha_{10} = 0.14902949.$$

e demais,

$$M = 1:000\$000$$
$$Q = 2:278\$122\ ;$$

substituindo estes valores na formula, $\alpha_n M - \alpha_{n-n'} Q$, obtem-se:

$$1.018522 - 339507 = \text{Rs. } 679\$015.$$

Resultado igual ao anterior como deve ser.

Meios analogos se empregão para determinar a importancia que deve antecipar o mutuario quando queira reduzir a sua annuidade.

Se quizer, por exemplo, reduzir a annuidade á parte $\frac{l}{k}$, deverá antecipar a $\frac{k-l}{k}$ do capital devido.

Assim, no caso acima ficando a annuidade reduzida a

$$\frac{1}{3}\times 1.018522 = 339\$507,$$

deverá antecipar:

$$\frac{2}{3}\times 6834366 = 4:556\$244.$$

Se fôr uma quantia certa, a', á qual deva reduzir-se a annuidade, pode fazer-se a relação $\frac{a'}{a_n}$, e proceder-se como acima; ou fazer-se o calculo pela equação seguinte que dá o valor da quantia Q que se deve antecipar; porque sendo $\frac{a}{\alpha_{n-n'}}$ a parte do capital que falta amortizar, pode fazer-se a proporção:

$$\frac{a}{\alpha_{n-n'}} : a :: \left(\frac{a}{\alpha_{n-n'}} - Q\right) : a' .$$

De que resulta:

$$Q = \frac{a - a'}{\alpha_{n-n'}} . \qquad (c)$$

Tomando ainda o exemplo precedente, que

$$a' = 339\$507 ;$$

isto é, que seja a esta quantia que se queira reduzir a annuidade. Teremos:

$$Q = \frac{1018522 - 339507}{0.14902942} = 4:556\$244.$$

O mesmo resultado como deve ser.

Nas formulas precedentes, n e n' podem ser fraccionarios. E' preciso então notar, que, se da data do pagamento parcial antecipado começarem a contar-se os annos seguintes da amortização do saldo, sendo n' fraccionario, as datas dos vencimentos das annuidades reduzidas não coincidiráõ com as primitivas; porque ficaráõ sendo nos anniversarios do pagamento antecipado; e tambem segundo estas novas datas se deverá determinar o valor de $qr^{n'-1}$ (§ 1° desta Secç.) no novo periodo.

Mas podem-se calcular as annuidades reduzidas para se pagarem nas mesmas datas primitivas. Faremos o calculo de ambos os modos. Tratemos primeiro do caso em que as novas annuidades serão pagaveis nos anniversarios do pagamento antecipado.

Exemplo.—*Seja um emprestimo de 12:000$000 réis a 9 % de juro annual e 2 % de amortização.* Pela formula (a) do § 3°, e tomando

os logarithmos na Tab. VII (1ª parte), acha-se o tempo em que a amortização se completa:

$$n = \frac{\log 5.5}{\log 1.09} = \frac{.7403626895}{.0374264979} = 19.7817784 \text{ annos.}$$

Passados 2 annos e 4 mezes, o mutuario (tendo satisfeito tudo o que devia de juros e de amortização até esta epoca), quer pagar antecipadamente 3:000$000 p/c. do capital devido: qual é A ANNUIDADE REDUZIDA *que deverá ficar pagando até ao vencimento do prazo primitivo?*

Abatendo os 3:000$000 antecipados ao capital que no fim de 2 $^1/_3$ annos falta amortizar (formula (*f*), § 5°, sendo $r^{n'} = (1.09)^{2.333\ldots} = 1.22272416$), restão devidos Rs. 8:406$069. Passados 2 $^1/_3$ annos, restão $17\frac{4484451}{10000000}$ para completar o prazo da amortização. E' preciso determinar a annuidade capaz de amortizar neste prazo aquelle capital devido.

Teremos pela formula (*d*) do § 2°:

$$8406069 \times \frac{0.09 \times (1.09)^{17.4484451}}{(1.09)^{17.4484451} - 1} = \text{Rs. } 972\$816,4.$$

Esta annuidade compõe-se de:

Juro de 9 % sobre 8:406$069	756$546,2
Amortização.....	216$270,2
Annuidade.....	972$816,4

Com effeito, esta amortização, nos anniversarios do pagamento antecipado pelo restante do prazo, reproduzirá o capital 8:406$069, recebendo os incrementos dos seus juros compostos, como se pode verificar pela formula (*a*) do § 1°:

$$216\$270,2 \times \frac{(1.09)^{17.4484451} - 1}{0.09} = \text{Rs. } 8:406\$069.$$

Convém recordar que $r^n = \frac{a}{q}$; que n'este caso é $\frac{972816,4}{216270,2} = 4.4981527$.

Calculemos agora a nova annuidade no caso em que deva ser pagavel nas datas primitivas (anniversarios do emprestimo).

A formula (*l*) do § 11° da Secç. II resolverá a questão, visto

que se trata de uma annuidade antecipada, sendo o intervallo da dilação menor do que cada intervallo entre dois pagamentos consecutivos. Como neste caso, $m = \mu = 1$, se notarmos por C o capital que resta amortizar, deduz-se da dita formula o valor a' da nova annuidade, sendo n'' o tempo que falta para completar o prazo primitivo da amortização :

$$a' = C\frac{t \times r^{n''}}{r^{1-\nu} \times (r^{n''} - 1)} = C \times \frac{t}{r^{1-\nu} - r^{-(n''+\nu-1)}}. \qquad (d)$$

O primeiro pagamento terá lugar no fim de 8 mezes : logo,

$$\nu = \frac{2}{3};$$

do prazo total da amortização (19 annos e uma fracção) tem-se pago dois annos ; portanto,

$$\begin{aligned} n'' &= 17.781778425; \\ n''+\nu-1 &= 17.448445091; \\ (1.09)^{n''} &= 4.62923996; \\ (1.09)^{-(n''+\nu-1)} &= 0.22231348. \end{aligned}$$

Teremos :

$$a' = 8406069 \times \frac{0.09}{(1.09)^{1/3} - (1.09)^{-17.4484451}} = \frac{756546.21}{0.80682899} = 937678.52.$$

E' pois a annuidade a pagar nas datas primitivas, Rs. 937$679.

Pela formula (a) do § 1°, Secç. I, achamos que o capital devido com os seus juros importa no fim de 17 annos mais a fracção 0,4484451 :

$$8406069 \times 4.4981527 = 37:811\$782.$$

Mas aquella annuidade *á mesma taxa de juro* produz esta mesma somma, como se verifica pela formula (a) do § 2°, Secç. II :

$$937678{,}52 \times \frac{3.62923996}{0.09} = 37:811\$782.$$

O que serve de prova.

Cumpre observar que não se acharia o valor da quota para amortização tomando a differença entre a annuidade e o juro de um anno do capital, como se fez no caso antecedente. *Aqui é preciso deter-*

minar a quota pela formula (b), § *1° desta Secç.; e o resto será o juro.* Deste modo:

$$\text{Quota}\ldots\ldots \frac{0.09\times 8406069}{4.62923996-1} = 208\$458,58\,;$$
$$\text{Juro}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 729\$219,94.$$

Tenha-se bem em vista que é sobre esta quota que nos annos seguintes se deve calcular $qr^{n'-1}$, para se saber quanto do capital está amortizado.

Parece á primeira vista que o juro é a menor taxa do que a 9 %. A razão é que o juro no primeiro pagamento é de 8 mezes, e nos pagamentos subsequentes de 1 anno; e sendo a annuidade uniforme, resulta que se paga juro demais no primeiro, e demenos nos subsequentes: compensando a primeira differença rigorosamente as outras.

O juro por 8 mezes (2° supplemento á Tab. I) é 497$086,16, e portanto paga-se na primeira annuidade +232$133,78
O juro de 1 anno sendo 756$546,21, paga-se em cada um dos annos seguintes..... —27$326,27

Mas pela formula (*a*) do § 1°, Secç. I, e sabendo-se que $(1.09)^{16.781778125} = 4.24700914$, tem-se:

$$+232133.78\times(1.09)^{16.781778125} = +985\$874\,;$$

e pela formula (*a*) do § 2.°, Secç. II:

$$-27326,27\frac{(1.09)^{16.781778125}-1}{0.09} = -985\$874\ (^1).$$

AUGMENTO DO CAPITAL PRIMITIVAMENTE EMPRESTADO.

Assim como se pode por um pagamento antecipado diminuir a quantia devida, tambem se pode augmental-a por um novo emprestimo, devendo effectuar-se a amortização total no prazo primitivo. Para

(1) Entrei nestes detalhes, talvez tidos por ninamente minuciosos, para bem iniciar no assumpto os que desejarem desempenhar *conscienciosamente* algum encargo de determinar valores nesta especie de calculos; nem serão menosprezados quando a aptidão fôr melhor titulo do que o empenho no provimento dos encargos.

determinar a nova annuidade que deverá extinguir a divida assim augmentada, basta fazer positivos os segundos termos das formulas (*a*) e (*b*) deste §.

Sendo n' fraccionario, procura-se como no caso precedente a nova annuidade capaz de amortizar o capital augmentado. As novas annuidades poderáõ ser pagaveis nos anniversarios do incremento do capital devido, ou nas datas primitivas. Observem-se segundo o caso as regras precedentes.

Dêmos um exemplo de incremento de capital, com as annuidades pagaveis nos anniversarios do incremento :

Exemplo.—*Se se tiverem emprestado 7:000$000 a 9 % de juro e 1 % de amortização, esta se effectuará em* $26\frac{719}{1000}$ *annos. Passados 5 annos e 3 mezes, o mutuario tendo satisfeito juros e amortização até esta epoca, acha-se devendo o saldo de 6:555$000, a que elle quer accrescentar mais 7:000$000, para ser amortizado o total até ao fim do prazo primitivo. O novo prazo será* $26.719—5.25 = 21\frac{469}{1000}$ *annos. Qual é o valor da nova annuidade que terá de pagar?*

Pela formula (*d*) do § 2° desta Secç., teremos o valor da annuidade capaz de amortizar a divida de 13:655$000.

Deste modo (sendo $(1.09)^{21.469} = 6.36076811$) :

$$13555000 \times \frac{0.09 \times 6.36076811}{5.36076811} = \text{Rs. } 1:447\$520.$$

Esta annuidade decompõe-se em :

Juro de 9 % sobre 13:555$000...	1:219$950
Amortização.....	227$570

Com effeito, esta amortização (nos anniversarios do incremento do emprestimo), attribuindo-se-lhe o respectivo juro, reproduzirá o capital em 21 annos mais a fracção 0,469.

$$227570 \times \frac{(1.09)^{21.469} - 1}{0.09} = \text{Rs. } 13:555\$000.$$

NOTA SOBRE O PAGAMENTO SEMESTRAL DAS ANNUIDADES.

Ponderou-se no principio do § 15° que recebendo as *sociedades de credito real* dos seus mutuarios as annuidades por metade em cada semestre, devião calcular-as pelas formulas do § 6° da Secç. II.

Mostremos pois como proceder nesta conformidade nos casos precedentes. A regra é tomar para unidade de tempo *o semestre*, e cada annuidade por metade, calculando-se-lhe o juro pela formula $\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}$; que neste caso, como $\mu = 1$, torna-se facil, visto que o expoente é $^1/_2$, e facil é a extracção da raiz quadrada. No 2º Supplemento á Tab. I acha-se o juro relativo a 6 mezes para as taxas nelle contidas.

Como os pagamentos são semestraes, note-se que ha $2n$ periodos no prazo de amortização, de que resultará $(1+t)^{\frac{1}{2}2n} = (1+t)^n$.

Nos casos precedentes apresentou-se a hypothese de um emprestimo de 10:000$000 a juro de 8 % ao anno para ser amortizado em 20 annos mediante a annuidade de 1:018$522: como se fosse a pagar por inteiro no fim de cada anno, mas effectivamente paga por metade em cada semestre.

Para ter o valor real de metade da annuidade empregaremos a formula (c) *do* § *6º, Secç. II.*

Aqui, $m = 2$, $n = 20$, $\mu = 1$, $t = 0{,}08$; portanto,

$$\frac{a}{2} = \frac{10000000 \times \left\{(1.08)^{\frac{1}{2}} - 1\right\}}{1-(1.08)^{-20}} = \frac{392304{,}8}{0.78545179} = 499463{,}88.$$

Metade da annuidade é Rs. 499$464.

Aquella annuidade de 1.018$522 é devida no fim do anno; se se quizer receber aos semestres, ha adiantamento de metade; e para que os dois pagamentos sejão iguaes, teremos (2º Suppl. á Tab. I):

$$(1.08)^{\frac{1}{2}}x + x = 1018522.$$

Donde,

$$x = \frac{1018522}{2.03923048} = 499463{,}88.$$

Igual resultado.

Ora 10:000$000 com seus juros de 8 % em 20 annos (Tab. I) importão 46:609$571.

Vejamos se a annuidade achada attinge no fim do prazo esta quantia. Tomemos a formula (*b*) do dito § 6º:

$$\frac{499463,88\times\{(1.08)^{20}-1\}}{(1.08)^{\frac{1}{2}}-1}=\frac{499463,88\times 3.66095714}{0.03923048}=\text{Rs. } 46:609\$571,$$

valor do capital com seus juros.

No caso de pagamento antecipado teremos o mesmo calculo do principio deste §, que deu em resultado 6:834$366, valor do pagamento antecipado no fim de 10 annos; por ser o juro semestral r%, e o numero de semestres, $2n$.

Para prova, investiguemos quanto é o valor actual das annuidades pelos 10 annos que faltão (regra já indicada).

Tomemos a equação (*c*) do dito § 6º:

$$\frac{499463,88\times\{1-(1.08)^{-10}\}}{(1.08)^{\frac{1}{2}}-1.}=6834366.$$

O pagamento antecipado do que falta amortizar são 6:834$366, como se achou.

Para determinar o valor a que fica reduzida a annuidade fazendo-se uma parte do pagamento antecipado, empregaremos em lugar da formula (*b*) deste §, a formula (*c*) do § 6º, Secç. II.

Seja que no fim de 10 annos o mutuario pague por conta 2:278$122: a quanto fica reduzida a annuidade para os 10 annos restantes?

Deduzida esta quantia do capital que falta amortizar (6:834$366), ficão a debito do mutuario 4:556$244. Ter-se-ha a annuidade:

$$\frac{a}{2}=\frac{4556244\times\{(1.08)^{\frac{1}{2}}-1.\}}{1-(1.08)^{-10}}=332975,9.$$

Fica sendo metade da annuidade reduzida Rs. 332$976.

Acha-se ainda mais facilmente por meio da proporção estabelecida para o exemplo que se segue.

Querendo-se que a annuidade de 499$463,88 fique reduzida a 332$975,9, que quantia Q é preciso antecipar?

O capital que falta amortizar é de Rs. 6:834$366. Faremos a proporção:

$$6{:}834\$366 : 499\$463,88 :: 6{:}834\$366 - Q : 332\$975,9$$

Donde,

$$Q = \frac{166487.98 \times 6834366}{499463,88} = 2278122.$$

E' preciso antecipar Rs. 2:278$122.

Esta mesma proporção resolve o caso precedente, sendo Q conhecido.

Neste caso como no precedente, em lugar de x, nas formulas (b) e (c) deste §, empregamos o seu valor $\frac{a}{M}$ (§ 2° desta Secç.), por falta de taboas adequadas.

No caso de pagamento antecipado de parte da divida, sendo n e n' *numeros fraccionarios*, figurou-se a hypothese de uma divida de 12:000$000 a 9 % de juros, para ser amortizada com a quota de 2 % em 19 annos e a fracção 0,7817784. *Antecipando-se 3:000$000 passados 2 annos e 4 mezes, qual é a nova annuidade exigivel nos anniversarios do pagamento antecipado?*

A annuidade primitiva, sendo a pagar por inteiro no fim do anno é 1:320$000; mas sendo por metade em cada semestre, acha-se pelo processo do caso antecedente:

$$\frac{1.320000}{(1.09)^{\frac{1}{2}}+1} = \frac{1320000}{2.04403065} = \text{Rs. } 645\$782,88.$$

E' este o valor do pagamento semestral da annuidade primitiva.

Pelo processo empregado antecedentemente, teremos a reduzida:

$$8406069 \times \frac{\left\{(1.09)^{\frac{1}{2}}-1\right\} \times (1.09)^{17.4184151}}{(1.09)^{17.4181151}-1} = \text{Rs. } 475\$930,44.$$

Este pagamento semestral amortiza 8:406$069 (a que fica reduzida a divida) e seus juros pelo resto do prazo.

Com effeito, recordando que $(1.09)^{\frac{1}{2}} = 1.04403065$ (2º Supplemento á Tab. I) e $(1.09)^{17.4181151} = 4.49815270$, teremos pela formula (*b*) do § 6º, Secç. II :

$$475930{,}44 \times \frac{3.4981527}{.04403065} = \text{Rs. } 37{:}811\$782.$$

Valor igual ao precedentemente achado.

Para exercicio sobre este assumpto importante, *calculemos a annuidade pagavel nas datas primitivas do emprestimo.*

Da formula (*l*) do § 11º, Secç. II, deduz-se o valor $\frac{a'}{2}$ do novo pagamento semestral. Aqui $m = 2$ e $\mu = 1$; e notando por C o capital que resta amortizar, e por n'' o tempo que falta para completar o prazo primitivo da amortização, teremos:

$$\frac{a'}{2} = C \times \frac{r^{\frac{1}{2}} - 1}{r^{\frac{1}{2}-\nu} - r^{-\left(n''+\nu-\frac{1}{2}\right)}} = C \times \frac{\left(r^{\frac{1}{2}} - 1\right) \times r^{n''}}{r^{\frac{1}{2}-\nu} \times \left(r^{n''} - 1\right)}. \qquad (e)$$

Em 2 $^1/_3$ annos tem-se effectuado 4 pagamentos semestraes; e faltão 2 mezes para o 5º; portanto,

$$n'' = 17.781778425;\ \nu = \frac{1}{6};\ t = 0{,}09;\ \text{e}$$
$$(1.09)^{17.781778425} = 4.62923996.$$

Teremos :

$$\frac{a'}{2} = 8406069 \times \frac{\left\{(1.09)^{\frac{1}{2}} - 1\right\} \times (1.09)^{17.781778425}}{(1.09)^{0.333\cdots} \times \left\{(1.09)^{17.781778425} - 1\right\}} = 458739{,}94$$

E' pois a nova annuidade pagavel aos semestres e nas epocas primitivas, Rs. 458$740.

Pela formula (*b*) do § 6º, Secç. II. se verifica que esta annuidade amortiza capital e juros :

$$458739{,}94 \times \frac{(1.09)^{17.781778425} - 1}{(1.09)^{\frac{1}{2}} - 1} = \text{Rs. } 37{:}811\$782.$$

Valor já achado.

Para determinar a quota para amortização, e calcular o valor de $qr^{n'-1}$ (capital que falta amortizar) nos annos subsequentes, observem-se as regras acima dadas para o caso da equação (*d*).

SECÇÃO QUARTA

DAS ANNUIDADES CRESCENTES E DECRESCENTES

Uma annuidade que todos os annos se vai augmentando com uma certa quantia constante chama-se uma *annuidade crescente*; e chama-se *decrescente* a annuidade de que se vai diminuindo todos os annos uma certa quantia constante [1]. Considerão-se mais commummente as annuidades que crescem ou decrescem segundo a ordem natural dos numeros; como por exemplo: a, $2a$, $3a \ldots na$; mas tomemos uma formula mais geral em que a annuidade a vá cada anno tendo o incremento ou deducção de a'.

§ 1.—SOMMA DE ANNUIDADES COLLOCADAS NO PRINCIPIO DO ANNO.

Da collocação no principio de cada anno da quantia a com seus incrementos ou deducções, e com os respectivos juros, resulta no fim de n annos:

$$ar^n + (a \pm a')r^{n-1} + (a \pm 2a')r^{n-2} \ldots\ldots + (a \pm (n-1)a')r$$

Nesta serie, os termos em que entra a sommão:

$$a \times \frac{r^{n+1} - r}{t};$$

a que devemos addicionar, ou de que devemos subtrahir, a somma dos termos em que entra a'.

O seguinte quadro mostra com facilidade no resultado final (os dois ultimos termos) a somma da serie dos termos em que entra a'. Para melhor fixarmos as idéas tomemos n como valendo 4; por baixo de cada termo da serie assentemos o seu valor, tomado segundo o

---

[1] Não nos occuparemos das annuidades crescentes ou decrescentes em progressão geometrica, por não terem applicação.

respectivo coefficiente; sommadas as linhas horisontaes das quantidades resultantes dispostas em triangulo, obtem-se á direita duas columnas, que por sua vez sommadas verticalmente dão em resultado os dois ultimos termos, que são evidentemente iguaes em valor á serie primitiva:

Eis aqui a serie e suas transformações tomando a' como positivo. Que:

$$\begin{array}{lllll}
a'r^{n-1}+2a'r^2+(n-1)a'r & = \psi & & & \\
\| \qquad \| \qquad \| & & & & \\
a'r^{n-1}+a'r^2+\quad a'r & = +\frac{a'}{t}r^n & - & \frac{a'}{t}r & \\
\qquad\quad +a'r^2+\quad a'r & = +\frac{a'}{t}r^3 & - & \frac{a'}{t}r & \\
\qquad\qquad\qquad +\quad a'r & = +\frac{a'}{t}r^2 & - & \frac{a'}{t}r & \\
 & \| & & \| & \\
 & \overbrace{\frac{a'}{t}\times\frac{r^{n+1}-r^2}{t}} & - & \overbrace{\frac{a'}{t}\times(n-1)r} & = \psi.
\end{array}$$

Preparando convenientemente esta quantidade, e addicionando-lhe a somma da serie a, obtem-se para somma da annuidade crescente (em que a' é positivo):

$$a\times\frac{r^{n+1}-r}{t}+\frac{a'}{t}\times\left\{\frac{r^{n+1}}{t}-\frac{r}{t}-\frac{r^2-r}{t}-(n-1)r\right\}.$$

Recordando que $\frac{r^2-r}{t}=r$ (visto que $t=r-1$), e que $\frac{r^{n+1}-r}{t}=S_n$ (formula (*b*) do § 1º, Secç. II), obtem-se afinal a somma das annuidades crescentes collocadas no principio do anno:

$$\left(a+\frac{a'}{t}\right)\times S_n-\frac{a'}{t}nr. \qquad (a)$$

Na somma das *annuidades decrescentes* collocadas no principio do anno, a' é negativo; mudando os signaes, tem-se esta expressão:

$$\left(a-\frac{a'}{t}\right)\times S_n+\frac{a'}{t}nr. \qquad (b)$$

E' evidente, que nas annuidades decrescentes é necessario que seja

$$a>(n-1)\times a'$$

§ II.—SOMMA DE RENDAS COBRAVEIS NO FIM DO ANNO.

Para a somma das *rendas crescentes ou decrescentes*, que tenhão sido recebidas ou a receber, *no fim do anno*, é evidente que a unica differença é ser o expoente de r diminuido de uma unidade em cada termo; e recordando que $\frac{r^n-1}{t} = \Sigma_n$ (formula (b) do § 2°, Secç. II), obtem-se :

Somma da renda *crescente* :

$$\left(a+\frac{a'}{t}\right)\times\Sigma_n-\frac{a'}{t}n. \qquad (a)$$

Somma da renda *decrescente* :

$$\left(a-\frac{a'}{t}\right)\times\Sigma_n+\frac{a'}{t}n. \qquad (b)$$

§ III.—VALOR ACTUAL DAS RENDAS.

Resta examinar qual é o valor actual de uma renda *crescente* ou *decrescente* a receber no fim de cada anno.

Fazendo o desconto a cada pagamento futuro, tem-se a serie :

$$\frac{a}{r}+\frac{a\pm a'}{r^2}+\frac{a\pm 2a'}{r^3}\ldots\ldots+\frac{a\pm(n-1)a'}{r^n}.$$

Os termos em que entra a sommão :

$$a\times\frac{1-r^{-n}}{t}.$$

Para os termos em que entra a', fazendo a mesma analyse que se fez para a somma, acha-se (tomando $n = 4$, e a' positivo) :

$$\begin{array}{lllll}
\frac{a'}{r^2}+\frac{2a'}{r^3}+\frac{(n-1)a'}{r^n} & = \psi. & & & \\
\| \quad \| \quad \| & & & & \\
\frac{a'}{r^2}+\frac{a'}{r^3}+\frac{a'}{r^n} & = \frac{a'}{t}\times\frac{1}{r} & -\frac{a'}{t}\times\frac{1}{r^n} & & \\
+\frac{a'}{r^3}+\frac{a'}{r^n} & = \frac{a'}{t}\times\frac{1}{r^2} & -\frac{a'}{t}\times\frac{1}{r^n} & & \\
+\frac{a'}{r^n} & = \frac{a'}{t}\times\frac{1}{r^{n-1}} & -\frac{a'}{t}\times\frac{1}{r^n} & & \\
 & \quad \| & \quad \| & & \\
 & \frac{a'}{t}\times\frac{1-r^{-n+1}}{t} & -\frac{a'}{t}\times\frac{n-1}{r^n} & = \psi. &
\end{array}$$

Preparando esta quantidade, e addicionando os termos em que entra a, obtem-se :

$$a\times\frac{1-r^{-n}}{t}+\frac{a'}{t}\left(\frac{1}{t}-\frac{r^{-n}}{t}-\frac{r^{-n+1}-r^{-n}}{t}-\frac{n-1}{r^n}\right).$$

Recordando que $\frac{1-r^{-n}}{t} = P_n$ (formula (b) do § 3°, Secç. II), e que $\frac{r^{-n+1}-r^{-n}}{t} = r^{-n}$ (visto que $t = r-1$), tem-se a formula para o presente valor de n annuidades *crescentes* :

$$\left(a+\frac{a'}{t}\right)P_n-\frac{a'}{t}nr^{-n}. \qquad (a)$$

Para o presente valor da annuidade *decrescente*, mudando os signaes, tem-se :

$$\left(a-\frac{a'}{t}\right)P_n+\frac{a'}{t}\times nr^{-n}. \qquad (b)$$

§ IV.—FORMULAS RELATIVAS Á ANNUIDADE 1.

Em todas as formulas precedentes podemos fazer $a = 1$, e em lugar de a' tomarmos a sua relação a a, fazendo $\frac{a'}{a} = \Delta$; assim obteremos as formulas geraes para a annuidade 1 *crescente* e *decrescente*:

Annuidades crescentes

Somma da collocação no principio de cada anno :

$$S_n^{cr} = \left\{(t+\Delta)\times S_n - \Delta n r\right\}\times\frac{1}{t}. \qquad (a)$$

Somma da renda effectuada no fim de cada anno :

$$\Sigma_n^{cr} = \left\{(t+\Delta)\times \Sigma_n - \Delta n\right\}\times\frac{1}{t}. \qquad (b)$$

Presente valor da renda exigivel no fim de cada anno seguinte :

$$P_n^{cr} = \left\{(t+\Delta)\times P_n - \Delta n r^{-n}\right\}\times\frac{1}{t}. \qquad (c)$$

Annuidades decrescentes

Somma da collocação no principio de cada anno:

$$S_n^{dc} = \left\{(t-\Delta)\times S_n + \Delta n r\right\}\times\frac{1}{t}. \qquad (d)$$

Somma da renda effectuada no fim de cada anno :

$$\Sigma_n^{dc} = \left\{(t-\Delta)\times \Sigma_n + \Delta n\right\}\times\frac{1}{t}. \qquad (e)$$

Presente valor da renda exigivel no fim de cada anno :

$$P_n^{dc} = \left\{(t-\Delta)\times P_n + \Delta n r^{-n}\right\}\times\frac{1}{t}. \qquad (f)$$

EXEMPLOS EM ANNUIDADES CRESCENTES.—*Seja a prestação no principio de cada anno de 1:000$000 réis a que annualmente se vá dando o incremento de 200$000 réis, e isto em 6 annos. Quanto importa a somma com os juros de 6 por cento?*

Tomando a formula (*a*) do § 1º desta Secç.,

$$a = 1:000\$000$$

$$a' = 200\$000$$

$$S_n = 7.39383765\,;$$

a somma é :

$$4333333 \times 7.39283765 - 3333333 \times 6 \times (1.06) = \text{Rs. } 10;839\$963.$$

O mesmo resultado se obtem tomando a formula (a) d'este §; onde $\Delta = \frac{200000}{1000000} = 0.2$; e multiplicando por 1:000$000; deste modo :

$$1:000\$000 \times \left\{ 0.26 \times 7.39383765 - 0.2 \times 6 \times 1.06 \right\} \times \frac{1}{0.06} = \text{Rs. } 10:839\$963.$$

Prova

Anno	Collocação no principio do anno	Quantos annos de juro a 6%	Importancia
1.º	1:000$000	6	1:418$519
2.º	1:200$000	5	1:605$871
3.º	1:400$000	4	1:767$468
4.º	1:600$000	3	1:905$625
5.º	1:800$000	2	2:022$480
6.º	2:000$000	1	2:120$000
		Somma Rs.	10:839$963

Resultado igual como deve ser.

Qual é a somma total da renda crescente de 1:000$000 com incrementos de 200$000, e o juro de 6% em 6 annos?

Empregando a formula para Σ_n^{cr} (b), teremos :

$$1:000\$000 \times \left\{ 0.26 \times 6.97531854 - 1.2 \right\} \times \frac{1}{0.06} = \text{Rs. } 10:226\$380.$$

Prova

Anno	Renda no fim do anno	Quantos annos de juro a 6%	Importancia
1.º	1:000$000	5	1:338$226
2.º	1:200$000	4	1:514$972
3.º	1:400$000	3	1:667$422
4.º	1:600$000	2	1:797$760
5.º	1:800$000	1	1:908$000
6.º	2:000$000	0	2:000$000
		Somma Rs.	10:226$380

O prezente valor desta mesma renda crescente, tomando a formula para $P_n^{cr}(c)$, é:

$$1{:}000\$000 \times \left\{0.26 \times 4.91732432 - 1.2 \times 0.70496054\right\} \times \frac{1}{0.06} = \text{Rs. } 7{:}209\$195.$$

Prova

Anno	Renda do fim do anno	Quantos annos de desconto a 6%	Importancia
1.º	1:000$000	1	943$396
2.º	1:200$000	2	1:067$996
3.º	1:400$000	3	1:175$467
4.º	1:600$000	4	1:267$350
5.º	1:800$000	5	1:345$065
6.º	2:000$000	6	1:409$921
		Somma Rs.	7:209$195

Exemplos em annuidades decrescentes.—*Para a somma total da collocação no principio de cada anno, se a primeira annuidade fôr 2:000$000, e a deducção annual 200$000, teremos na formula (d) para* S_n^{dc},

$$\Delta = \frac{200000}{2000000} = 0.1.$$

Sejão 6 annuidades, e o juro a 6 %; acharemos a somma:

$$2:000\$000\times\left\{-0.04\times7.39383765+0.1\times6\times1.06\right\}\frac{1}{0.06}=\text{Rs. }11:341\$550.$$

Prova

Anno	Collocação no principio do anno	Quantos annos de juro a 6%	Importancia
1.º	2:000$000	6	2:837$038
2.º	1:800$000	5	2:408$806
3.º	1:600$000	4	2:019$963
4.º	1:400$000	3	1:667$423
5.º	1:200$000	2	1:348$320
6.º	1:000$000	1	1:060$000
		Somma Rs.	11:341$550

Pela formula para Σ_n^{dc} (*e*) achar-se-ha *a somma total de uma renda no fim de cada anno dos mesmos valores precedentes ser igual a Rs. 10:699$575.*

Para o presente valor da mesma renda decrescente, tomando a formula para P_n^{dc} (*f*), teremos:

$$2:000\$000\times\left\{-0.04\times4.91732432+0.1\times6\times.70496054\right\}\times\frac{1}{0.06}$$
$$=\text{Rs. }7:542\$778.$$

Prova

Anno	Renda no fim do anno	Quantos annos de desconto a 6%	Importancia
1.º	2:000$000	1	1:886$792
2.º	1:800$000	2	1:601$994
3.º	1:600$000	3	1:343$391
4.º	1:400$000	4	1:108$931
5.º	1:200$000	5	896$710
6.º	1:000$000	6	704$960
		Somma Rs.	7:542$778

Resultado igual como deve ser.

§ V.—ANNUIDADES EM FRACÇÕES E JUROS CAPITALIZADOS EM OUTRAS FRACÇÕES. FORMULAS GERAES.

Pode-se applicar ás annuidades crescentes e decrescentes a theoria do § 6º da Secç. II: isto é, que estas annuidades tambem podem ser pagas ou a pagar repartidamente cada anno, sendo differentes as epocas de capitalização do juro. Se o incremento ou deducção fôr uniforme em cada prestação, resulta a progressão arithmetica, que reduz o calculo aos casos dos §§ precedentes, tomando para unidade de tempo um intervallo entre duas prestações consecutivas, e referindo-lhe a taxa do juro pelo methodo exposto no mesmo § 6º. Examinemos porem o caso em que uma annuidade tenha um incremento ou deducção *annual* uniforme, e em cada anno, com esse incremento ou deducção, seja repartida em m prestações; sendo $\frac{1}{\mu}$ do juro annual capitalizado μ vezes.

Indicando, como antecedentemente,
a, o importe da primeira annuidade,
a', o incremento ou deducção annual,
n, o numero de annos ou de annuidades,
m, o numero de prestações em cada anno,
t, a taxa de juro annual,
μ quantas vezes em cada anno se capitaliza $\frac{t}{\mu}$.

Para simplificar, façamos *um mais a taxa do juro afferente a cada prestação*,

$$\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}} = \delta. \qquad (a)$$

Sendo cada prestação collocada no principio de cada periodo, e $\pm a'$ conforme a annuidade fôr crescente ou decrescente, teremos, para a somma de n annuidades, a serie:

$$\overbrace{\frac{a}{m}\delta^{mn}+\frac{a}{m}\delta^{mn-1}\ldots+\frac{a}{m}\delta^{mn-(m-1)}}^{\textit{Anno 1.º}}+\overbrace{\frac{a\pm a'}{m}\delta^{(n-1)m}\ldots+\frac{a\pm a'}{m}\delta^{(n-1)m-(m-1)}}^{\textit{Anno 2.º}}\ldots\ldots$$

$$\overbrace{+\frac{a\pm(n-1)a'}{m}\delta^{[n-(n-1)]m}\ldots+\frac{a\pm(n-1)a'}{m}\delta^{[n-(n-1)]m-(m-1)}}^{\textit{Anno n}}.$$

A somma dos termos em que entra a obtem-se pela formula (a) do § 6º da Secç. II.

Procuremos a somma dos termos em que entra a' pelo mesmo methodo precedente: e para facilitar a operação, supponhamos que $n = 4$, e $m = 2$.

Teremos a serie e suas transformações:

$$\pm\left\{\frac{a'}{m}\delta^{(n-1)m}\right\} = \pm\left\{\frac{a'}{m}\delta^{(n-1)m} + \frac{a'}{m}\delta^{5} + \frac{2a'}{m}\delta^{4} + \frac{2a'}{m}\delta^{3} + \frac{(n-1)a'}{m}\delta^{m} + \frac{(n-1)a'}{m}\delta^{0}\right\} = \pm\psi$$

$$= \frac{a'}{m}\delta^{(n-1)m} \pm \frac{a'}{m}\delta^{5} = \frac{a'}{m}\delta^{4} \pm \frac{a'}{m}\delta^{3} = \frac{a'}{m}\delta^{m} \pm \frac{a'}{m}\delta^{0}$$

$$\pm \frac{a'}{m}\delta^{(n-1)m} \pm \frac{a'}{m}\delta^{5} \pm \frac{a'}{m}\delta^{4} \pm \frac{a'}{m}\delta^{3} \pm \frac{a'}{m}\delta^{m} \pm \frac{a'}{m}\delta^{0}$$

$$= \left(\frac{a'}{m}\right)^{\frac{\delta^{(n-1)m+1}-1}{\delta-1}} \qquad = \left(\frac{a'}{m}\right)^{\frac{\delta^{(n-2)m+1}-1}{\delta-1}} \qquad = \left(\frac{a'}{m}\right)^{\frac{\delta^{m+1}-1}{\delta-1}}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{a'}{m}\right)^{\frac{\delta^{mn+1}-\delta^{m+1}}{\delta^{m}-1}} \times \left(\frac{a'}{m}\right)^{\frac{\delta^{m+1}-1}{\delta-1}} \\ \qquad\qquad \times \left(\frac{a'}{m}\right)^{\frac{\delta^{m+1}-1}{\delta-1}} \times (n-1)\delta \end{array}\right\} = \pm\psi.$$

Visto que,

$$\frac{\delta^{mn+1}-\delta^{m+1}}{\delta^{m}-1}=\frac{\delta^{mn+1}-\delta}{\delta^{m}-1}-\frac{\delta^{m+1}-\delta}{\delta^{m}-1};\ \text{e que}\ \frac{\delta^{m+1}-\delta}{\delta^{m}-1}=\delta,$$

preparando a somma acima, dos termos em que entra a', pondo por δ o seu valor (equação (a)), e addicionando-lhe a somma dos termos em que entra a (formula (a) do § 6º da Secç. II), obtem-se a formula para a somma da annuidade crescente ou decrescente, a quál com o seu incremento ($+a'$) ou deducção ($-a'$) annual é repartida por m periodos de cada anno, sendo cada fracção collocada *no principio* de cada periodo (*annuidade adiantada*), e $\frac{1}{\mu}$ do juro annual composto μ vezes por anno :

$$\left(\frac{a}{m}\pm\frac{\frac{a'}{m}}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\mu}-1}\right)\times\frac{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{n\mu}-1}{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\frac{\mu}{m}}}\mp\frac{n.\frac{a'}{m}}{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\frac{\mu}{m}}}. \qquad (b)$$

Se cada prestação da annuidade fôr collocada *no fim* do respectivo periodo (*annuidade não adiantada*), já sabemos que para obter a sua somma basta dividir a formula acima por $\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}$; e teremos :

$$\left(\frac{a}{m}\pm\frac{\frac{a'}{m}}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\mu}-1}\right)\times\frac{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{n\mu}-1}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}-1}\mp\frac{n.\frac{a'}{m}}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}-1}. \qquad (c)$$

Para ter o presente valor *da annuidade não adiantada*, isto é, em que cada prestação deverá ser servida *no fim* do respectivo periodo, basta dividir a precedente formula por $\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{n\mu}$; e teremos :

$$\left(\frac{a}{m}\pm\frac{\frac{a'}{m}}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\mu}-1}\right)\times\frac{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-n\mu}}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}-1}\mp\frac{n.\frac{a'}{m}}{\left\{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}-1\right\}\times\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{n\mu}}. \qquad (d)$$

Para ter o presente valor da *annuidade adiantada*, isto é, em que cada prestação deverá ser servida *no principio* do respectivo periodo, basta multiplicar por $\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{m}}$ a formula precedente; e teremos:

$$\left(\frac{a}{m}\pm\frac{\frac{a'}{m}}{\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{\mu}-1}\right)\times\frac{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-n\mu}}{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\frac{\mu}{m}}}\mp\frac{n.\frac{a'}{m}}{\left\{1-\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{-\frac{\mu}{m}}\right\}\times\left(1+\frac{t}{\mu}\right)^{n\mu}}. \qquad (e)$$

Para a annuidade crescente empregar-se-ha o signal superior; e o inferior para a annuidade decrescente.

Pode tambem fazer-se uso das Taboas do modo como se ensinou no § 6º da Secç. II.

Daremos exemplos que elucidem a natureza da operação, e mostrem a exactidão das formulas: servindo ao mesmo tempo de util exercicio.

Exemplos em annuidades crescentes. —*Seja a annuidade de 2:000$000 por 4 annos com o incremento annual de 200$000 réis, collocada por metade em cada semestre, e o juro annual de 6 °/₀ composto por ¹/₃ de quatro em quatro mezes.*

Pela proposta,

$$a = 2000000\,;\ a' = 200000\,;\ m = 2\,;\ n = 4\,;\ \mu = 3\,;\ t = 0.06.$$

1.º — *Quanto é a somma, sendo cada prestação collocada* no principio *do periodo respectivo?*

Teremos pela formula (*b*):

$$\left(1000000+\frac{100000}{(1.02)^3-1}\right)\times\frac{(1.02)^{12}-1}{1-(1.02)^{-1.5}}-\frac{400000}{1-(1.02)^{-1.5}}\cdots\cdots$$

$$= 2633773{,}363\times 9.16529675-13667216{,}6 = \text{Rs. } 10{:}472\$098.$$

2.º — *Quanto é a somma, sendo cada prestação collocada* no fim *de cada periodo?*

Teremos pela formnla (*c*):

$$\left(1000000+\frac{100000}{(1.02)^3-1}\right)\times\frac{(1.02)^{12}-1}{(1.02)^{1.5}-1}-\frac{400000}{(1.02)^{1.5}-1}\cdots\cdots$$

$$= 2633773{,}363\times 8{,}89705496-13267216{,}6 = \text{Rs. } 10{:}165\$610.$$

3.º — *Quanto é o presente valor, sendo cada prestação a collocar* no fim *do periodo respectivo?*

Teremos pela formula (*d*):

$$\left(1000000+\frac{100000}{(1.02)^3-1}\right)\times\frac{1-(1.02)^{-12}}{(1.02)^{1.5}-1}-\frac{400000}{\{(1.02)^{1.5}-1\}\times(1.02)^{12}}\cdots\cdots$$

$$= 2633773.363\times7.01526712-10461110 = \text{Rs. } 8{:}015\$514.$$

4.º — *Quanto é o presente valor, sendo cada prestação a collocar* no principio *do periodo respectivo?*

Teremos pela formula (*e*):

$$\left(1000000+\frac{100000}{(1.02)^3-1}\right)\times\frac{1-(1.02)^{-12}}{1-(1.02)^{-1.5}}-\frac{400000}{\{1-(1.02)^{-1.5}\}\times(1.02)^{12}}\cdots\cdots$$

$$= 2633773,363\times7.22677394-10776507 = \text{Rs. } 8{:}257\$178.$$

PROVA

1.º Exemplo

1.º anno	1.ª Prestação,	$1000000\times(1.02)^{12}$	=	1:268$242
	2.ª dita	$1000000\times(1.02)^{10.5}$	=	1:231$124
2.º »	3.ª dita	$1100000\times(1.02)^{9}$	=	1:314$602
	4.ª dita	$1100000\times(1.02)^{7.5}$	=	1:276$127
3.º »	5.ª dita	$1200000\times(1.02)^{6}$	=	1:351$395
	6.ª dita	$1200000\times(1.02)^{4.5}$	=	1:311$844
4.º »	7.ª dita	$1300000\times(1.02)^{3}$	=	1:379$570
	8.ª dita	$1300000\times(1.02)^{1.5}$	=	1:339$194
		Somma, Rs.		10:472$098

2.º Exemplo

1.º anno	1.ª Prestação,	$1000000\times(1.02)^{10.5}$	=	1:231$124
	2.ª dita	$1000000\times(1.02)^{9}$	=	1:195$093
2.º »	3.ª dita	$1100000\times(1.02)^{7.5}$	=	1:276$127
	4.ª dita	$1100000\times(1.02)^{6}$	=	1:238$779
3.º »	5.ª dita	$1200000\times(1.02)^{4.5}$	=	1:311$843
	6.ª dita	$1200000\times(1.02)^{3}$	=	1:273$450
4.º »	7.ª dita	$1300000\times(1.02)^{1.5}$	=	1:339$194
	8.ª dita	$1300000\times(1.02)^{0}$	=	1:300$000
		Somma, Rs.		10:165$610

3.º Exemplo

1.º anno	1.ª Prestação,	$1000000 \times (1.02)^{-1.5}$	=	970$733
	2.ª dita	$1000000 \times (1.02)^{-3}$	=	942$322
2.º »	3.ª dita	$1100000 \times (1.02)^{-4.5}$	=	1:006$218
	4.ª dita	$1100000 \times (1.02)^{-6}$	=	976$768
3.º »	5.ª dita	$1200000 \times (1.02)^{-7.5}$	=	1:034$380
	6.ª dita	$1200000 \times (1.02)^{-9}$	=	1:004$106
4.º »	7.ª dita	$1300000 \times (1.02)^{-10.5}$	=	1:055$946
	8.ª dita	$1300000 \times (1.02)^{-12}$	=	1:025$041
		Somma, Rs.		8:015$514

4.º Exemplo

1.º anno	1.ª Prestação,	$1000000 \times (1.02)^{-0}$	=	1:000$000
	2.ª dita	$1000000 \times (1.02)^{-1.5}$	=	970$733
2.º »	3.ª dita	$1100000 \times (1.02)^{-3}$	=	1:036$554
	4.ª dita	$1100000 \times (1.02)^{-4.5}$	=	1:006$218
3.º »	5.ª dita	$1200000 \times (1.02)^{-6}$	=	1:065$565
	6.ª dita	$1200000 \times (1.02)^{-7.5}$	=	1:034$380
4.º »	7.ª dita	$1300000 \times (1.02)^{-9}$	=	1:087$782
	8.ª dita	$1300000 \times (1.02)^{-10.5}$	=	1:055$946
		Somma, Rs.		8:257$178

EXEMPLOS EM ANNUIDADES DECRESCENTES.—*Seja a annuidade de 2:600$000 por 4 annos com a deducção annual de 200$000, collocada por metade em cada semestre, e o juro annual de 6 % composto por 1/3 de 4 em 4 mezes.*

Aqui, $a = 2600000$, e os mais valores como acima.

1.º — *Quanto é a somma, sendo cada prestação collocada* no principio *de cada periodo?*

Teremos pela formula (*b*) :

$$\left(1300000 - \frac{100000}{(1.02)^3 - 1}\right) \times \frac{(1.02)^{12} - 1}{1 - (1.02)^{-1.5}} + \frac{400000}{1 - (1.02)^{-1.5}} \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= -333773{,}363 \times 9.16529675 + 13667216{,}6 = \text{Rs. } 10{:}608\$085.$$

2.º — *Quanto é a somma, sendo cada prestação collocada* no fim *de cada periodo?*

Teremos pela formula (*c*) :

$$\left(1300000-\frac{100000}{(1.02)^3-1}\right)\times\frac{(1.02)^{12}-1}{(1.02)^{1.5}-1}+\frac{400000}{(1.02)^{1.5}-1}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= -333773{,}363\times 8.89705496+13267216{,}6 = \text{Rs. } 10{:}297\$617.$$

3.º — *Quanto é o presente valor, sendo cada prestação a collocar* no fim *de cada periodo?*

Teremos pela formula (*d*):

$$\left(1300000-\frac{100000}{(1.02)^3-1}\right)\times\frac{1-(1.02)^{-12}}{(1.02)^{1.5}-1}+\frac{400000}{\{(1.02)^{1.5}-1\}\times(1.02)^{12}}\cdots\cdots\cdots$$

$$= -333773{,}363\times 7.01526712+10461110 = \text{Rs. } 8{:}119\$600.$$

4.º — *Quanto é o presente valor, sendo cada prestação a collocar* no principio *do periodo respectivo?*

Pela formula (*e*), teremos:

$$\left(1300000-\frac{100000}{(1.02)^3-1}\right)\times\frac{1-(1.02)^{-12}}{1-(1.02)^{-1.5}}+\frac{400000}{\{1-(1.02)^{-1.5}\}\times(1.02)^{12}}\cdots\cdots\cdots$$

$$= -333773{,}363\times 7.22677394+10776507 = \text{Rs. } 8{:}364\$402.$$

PROVA

1.º Exemplo

1.º anno	1.ª Prestação,	$1300000\times(1.02)^{12}$	= 1:648$714
	2.ª dita	$1300000\times(1.02)^{10.5}$	= 1:600$461
2.º »	3.ª dita	$1200000\times(1.02)^{9}$	= 1:434$111
	4.ª dita	$1200000\times(1.02)^{7.5}$	= 1:392$139
3.º »	5.ª dita	$1100000\times(1.02)^{6}$	= 1:238$779
	6.ª dita	$1100000\times(1.02)^{4.5}$	= 1:202$523
4.º »	7.ª dita	$1000000\times(1.02)^{3}$	= 1:061$208
	8.ª dita	$1000000\times(1.02)^{1.5}$	= 1:030$150
		Somma Rs.	10:608$085

2.º Exemplo

1.º anno	1.ª Prestação,	$1300000\times(1.02)^{10.5}$	= 1:600$461
	2.ª dita	$1300000\times(1.02)^{9}$	= 1:553$620
2.º »	3.ª dita	$1200000\times(1.02)^{7.5}$	= 1:392$139
	4.ª dita	$1200000\times(1.02)^{6}$	= 1:351$395
3.º »	5.ª dita	$1100000\times(1.02)^{4.5}$	= 1:202$523
	6.ª dita	$1100000\times(1.02)^{3}$	= 1:167$329
4.º »	7.ª dita	$1000000\times(1.02)^{1.5}$	= 1:030$150
	8.ª dita	$1000000\times(1.02)^{0}$	= 1:000$000
		Somma Rs.	10:297$617

3.º Exemplo

1.º anno	1.ª Prestação,	$1300000 \times (1.02)^{-1.5}$	=	1:261$953
	2.ª dita	$1300000 \times (1.02)^{-3}$	=	1:225$019
2.º »	3.ª dita	$1200000 \times (1.02)^{-4.5}$	=	1:097$692
	4.ª dita	$1200000 \times (1.02)^{-6}$	=	1:065$565
3.º »	5.ª dita	$1100000 \times (1.02)^{-7.5}$	=	948$181
	6.ª dita	$1100000 \times (1.02)^{-9}$	=	920$431
4.º »	7.ª dita	$1000000 \times (1.02)^{-10.5}$	=	812$266
	8.ª dita	$1000000 \times (1.02)^{-12}$	=	788$493
		Somma, Rs.		8:119$600

4.º Exemplo

1.º anno	1.ª Prestação,	$1300000 \times (1.02)^{-0}$	=	1:300$000
	2.ª dita	$1300000 \times (1.02)^{-1.5}$	=	1:261$953
2.º »	3.ª dita	$1200000 \times (1.02)^{-3}$	=	1:130$787
	4.ª dita	$1200000 \times (1.02)^{-4.5}$	=	1.097$692
3.º »	5.ª dita	$1100000 \times (1.02)^{-6}$	=	976$768
	6.ª dita	$1100000 \times (1.02)^{-7.5}$	=	948$181
4.º »	7.ª dita	$1000000 \times (1.02)^{-9}$	=	836$755
	8.ª dita	$1000000 \times (1.02)^{-10.5}$	=	812$266
		Somma Rs.		8:364$402

Estas annuidades tambem podem ser differidas. Para ter o seu valor, calcula-se pela formula (*e*) o valor actual á epoca do primeiro pagamento, e faz-se o desconto pela dilação, segundo as regras do § 9º da Secç. II.

NOTAS

NOTA — A

(*Vide Secção I*, § 3.º)

DESCONTOS A JUROS SIMPLES

No desconto a juros simples, usa-se no commercio calcular o juro sobre o capital a vencer e deduzir este juro do mesmo capital para ter o valor do titulo descontado; mas isto é um erro, e conduz ao absurdo de, em prazos largos, o desconto exceder o capital.

Tambem é muito commum o uso de considerar-se o anno como tendo 360 dias, para facilitar os calculos por ter este numero muitos divisores exactos.

A quantia descontada deve ser tal, que juntando-se-lhe o seu juro pelo prazo do desconto, perfaça o valor nominal do titulo. Logo, este juro é que deve ser a importancia do desconto.

Sendo t o juro annual de 1, e designando por n o tempo do prazo do desconto, observe-se nas seguintes formulas:

Se n exprimir dias, $t' = \frac{t}{360}$ ou $\frac{t}{365}$;

Se n exprimir mezes, $t' = \frac{t}{12}$;

Se n exprimir annos, $t' = t$.

Nesta conformidade, teremos a quantia C descontada a juros simples:

$$C \times \frac{1}{1+t'n}. \qquad (a)$$

E a importancia do desconto:

$$C \times \frac{t'n}{1+t'n}. \qquad (b)$$

Tomando n como exprimindo um numero de dias, isto é, contando os prazos por dias; na formula acima $t' = \frac{t}{360}$, ou $\frac{t}{365}$. Construe-se uma taboa chamada de divisores fixos, que segundo a taxa do juro dá os valores de $\frac{360}{t}$; e então, para achar o juro de um capital em

tantos dias, basta multiplicar este capital pelos dias, e dividil-o pelo divisor fixo relativo á taxa.

No fim desta NOTA achão-se duas taboas de divisores fixos: uma considerando o anno de 360 e outra de 365 dias.

Ora, na precedente formula (*b*) de desconto, na hypothese de *n* priexmir dias, tem-se:

$$C \times \frac{\frac{t}{360} \times n}{1 + \frac{t}{360} \times n}.$$

Dividindo os dous termos por $\frac{t}{360}$, e representando o divisor fixo por *F*, obtem-se:

$$C \times \frac{n}{F+n}. \qquad (c)$$

O que mostra um processo semelhante ao do juro por meio do divisor fixo: *multiplica-se o capital pelos dias, e divide-se pelo divisor fixo augmentado do numero de dias.*

Com esta addição tem-se o desconto; sem esta addição tem-se o juro.

EXEMPLO. — *Um titulo de 8:300$000, cujo vencimento é daqui a 18 dias, quer-se descontar na razão do juro simples de 6 por cento ao anno; qual é o valor actual que se deve receber por elle?*

$$\text{Aqui, } t' = \frac{0.06}{360}; \quad n = 18.$$

Tem-se, segundo a formula (*a*):

$$\frac{8:300\$000}{1.003} = \text{Rs. } 8:275\$174.$$

A prova é que juntando-se a 8:275$174 o seu juro de 18 dias (24$826) somma a quantia de 8:300$000 pagavel no fim do prazo.

Procure-se agora qual é o desconto neste mesmo caso?

Tomando o divisor fixo (que para o juro de 6 % é 6000), tem-se pela formula (*c*):

$$\frac{8:300\$000 \times 18}{6018} = 24\$826.$$

Desconto, que sendo igual ao juro pelo mesmo prazo da quantia descontada, prova as proposições enunciadas.

Taboa dos Divisores fixos, considerando o anno de 360 dias

TAXA DO JURO ANNUAL	DIVISOR	TAXA DO JURO ANNUAL	DIVISOR
3 por cento	12000 *	9 por cento	4000 *
3 ⅛ »	11520 *	9 ¼ »	3892
3 ¼ »	11077	9 ½ »	3789
3 ⅜ »	10667	9 ¾ »	3692
3 ½ »	10286		
3 ⅝ »	9931		
3 ¾ »	9600 *	10 »	3600 *
3 ⅞ »	9290	10 ¼ »	3512
		10 ½ »	3429
4 »	9000 *	10 ¾ »	3349
4 ⅛ »	8727		
4 ¼ »	8470		
4 ⅜ »	8228	11 »	3273
4 ½ »	8000 *	11 ¼ »	3200 *
4 ⅝ »	7784	11 ½ »	3130
4 ¾ »	7579	11 ¾ »	3064
4 ⅞ »	7385		
		12 »	3000 *
5 »	7200 *	12 ½ »	2880 *
5 ⅛ »	7024		
5 ¼ »	6857		
5 ⅜ »	6698	13 »	2769
5 ½ »	6545	13 ½ »	2667
5 ⅝ »	6400 *		
5 ¾ »	6261		
5 ⅞ »	6128	14 »	2571
		14 ½ »	2483
6 »	6000 *		
6 ¼ »	5760 *		
6 ½ »	5538	15 »	2400 *
6 ¾ »	5333	15 ½ »	2323
7 »	5143		
7 ¼ »	4966	16 »	2250 *
7 ½ »	4800 *	16 ½ »	2182
7 ¾ »	4645		
		17 »	2118
8 »	4500 *	17 ½ »	2057
8 ¼ »	4364		
8 ½ »	4235		
8 ¾ »	4114	18 »	2000 *

* Só são exactos os divisores que levão asteristico.

Taboa dos Divisores fixos, considerando o anno de 365 dias

TAXA DO JURO ANNUAL	DIVISOR	TAXA DO JURO ANNUAL	DIVISOR
3 por cento	12166	6 ⅝ por cento	5509
3 ⅛ »	11680 *	6 ¾ »	5407
3 ¼ »	11231	6 ⅞ »	5309
3 ⅜ »	10815		
3 ½ »	10428	7 »	5214
3 ⅝ »	10069	7 ¼ »	5034
3 ¾ »	9733	7 ½ »	4867
3 ⅞ »	9419	7 ¾ »	4710
4 »	9125 *	8 »	4563
4 ⅛ »	8848	8 ¼ »	4424
4 ¼ »	8588	8 ½ »	4294
4 ⅜ »	8343	8 ¾ »	4171
4 ½ »	8111		
4 ⅝ »	7892	9 »	4056
4 ¾ »	7684	9 ¼ »	3946
4 ⅞ »	7487	9 ½ »	3842
		9 ¾ »	3744
5 »	7300 *		
5 ⅛ »	7122	10 »	3650 *
5 ¼ »	6952	10 ½ »	3476
5 ⅜ »	6791		
5 ½ »	6636	11 »	3318
5 ⅝ »	6489	11 ½ »	3174
5 ¾ »	6348		
5 ⅞ »	6213	12 »	3042
6 »	6083	13 »	2808
6 ⅛ »	5959		
6 ¼ »	5840 *	14 »	2607
6 ⅜ »	5725		
6 ½ »	5615	15 »	2433

* Só são exactos os divisores que levão asterisco.

N. B. — Fazendo-se uso desta ultima taboa, deve-se contar a cada mez o numero de dias que tem no calendario; mas fazendo-se uso da primeira, deve-se contar 30 dias a cada mez indistinctamente. Isto quando tem de se tomar o numero de dias entre duas datas.

NOTA — B

(*Vide Secção I § 7.º*)

VENCIMENTO COMMUM EM JUROS SIMPLES

O methodo empregado no commercio em juros simples de multiplicar cada quantia a vencer pelo seu prazo, e dividir a somma destes productos pela somma das quantias, para assim achar um vencimento commum, tem o inconveniente de tratar os descontos como se fossem juros, e occasionar erros sensiveis quando as quantias são muito differentes e os vencimentos muito distanciados. (*Vide* NOTA (*a*)).

O calculo exacto é excessivamente laborioso para a pratica: é mesmo incompativel com as operações expeditas do commercio. Pode-se porem empregar um methodo que dará resultados sufficientemente approximados, analogo á formula em caso de juro composto. Este methodo consiste em dividir a somma de todas as quantias a vencer pela somma das mesmas quantias descontadas cada uma pelos respectivos prazos, tirar 1 do resultado, e depois dividir por t'.

Determina-se t' segundo a unidade de tempo dos prazos; sendo a taxa do juro annual, t, observar-se-ha :

Se os prazos forem a dias, $t' = \frac{t}{360}$ ou $\frac{t}{365}$;

Se forem a mezes, $t' = \frac{t}{12}$;

Se forem a annos, $t' = t$.

Para demonstrar a regra acima devemos igualar a somma das quantias a vencer ao valor actual das mesmas quantias (descontada cada uma pelo seu prazo), com o juro pelo prazo commum x.

Sejão as quantias a vencer,

M pelo prazo n.

μ pelo prazo ν.

Teremos esta equação :

$$\left(\frac{M}{1+t'n}+\frac{\mu}{1+t'\nu}\right)\times(1+t'x) = M+\mu.$$

D'onde se tira :

$$x = \frac{\left(\dfrac{M+\mu}{\dfrac{M}{1+t'n}+\dfrac{\mu}{1+t'\nu}}\right)^{-1}}{t'}.$$

EXEMPLO. — *Vencendo-se 50:000$000 daqui a 3 mezes, 9:000$000 daqui a 30 mezes, e o juro de 9 % ao anno, procura-se um vencimento commum approximadamente equivalente.*

Aqui,

$$M = 50000000\,;\ n = 3\,;$$
$$\mu = 9.000000\,;\ \nu = 30\,;$$
$$t' = \frac{0.09}{12} = 0{,}0075.$$

Teremos :

$$x = \frac{\dfrac{50.000{,}000+9.000{,}000}{48.899.755+7.346{,}939}^{-1}}{0.0075} = 6\frac{5267}{10000} \text{ mezes.}$$

O valor exacto é $6\frac{5851}{10000}$. Com effeito, o juro de 50:000$000 em $3\frac{5851}{10000}$ mezes é igual ao desconto de 9:000$000 em $23\frac{4149}{10000}$, como deve ser.

Por aqui se deve avaliar o gráo de approximação.

Mas, calculando-se pelo methodo ordinariamente usado no commercio, acha-se para prazo commum $7\frac{4186}{10000}$ mezes.

A razão porque a formula acima dada, analoga á dos juros compostos, não é senão approximada para os juros simples, torna-se evidente considerando que se descontarmos uma quantia Q por 8 annos a 6 % de juros simples, por exemplo, e se á quantia descontada juntarmos os juros de 5 annos, teremos o valor

$$Q\times\frac{1}{1+8t'}\times(1+5t') = Q\times\frac{1.30}{1.48};$$

e se descontarmos Q por 3 annos (resto do primeiro prazo) teremos :

$$Q\times\frac{1}{1+3t'} = Q\times\frac{1}{1.18};$$

mas estes valores não são iguaes ; porque $\frac{130}{148} = \frac{1}{1.138} > \frac{1}{1.18}$.

Porém no caso dos juros compostos a igualdade tem lugar ; porque :

$$\frac{Q\times(1.06)^5}{(1406)^8} = \frac{Q}{(1.06)^3}.$$

NOTA — C

(*Vide Secção II § 3.º*)

É PRECISO EVITAR AS ILLUSÕES

Capitaes e annuidades a juros compostos em largos periodos attingem sommas avultadas; mas ainda as exagera a imaginação das pessoas alheias ao calculo, por uma disposição que sorrateiramente lhes tem incutido certos especuladores, e de que estes se servem para embahirem os incautos com a phantasmagoria de ingentes operações de sonhado credito. A producção das riquezas em geral tem certos limites que não podem ser destruidos por algarismos que escrevamos no papel. Já se observou no principio da Secç. I que a efficacia, e por consequencia o rendimento, do capital n'uma industria diminue com o incremento do mesmo capital; e como o juro é relativo á efficacia delle na sua cooperação com o trabalho, o juro tenderia a baixar indefinidamente, se novas fontes de producção, e mesmo a difficuldade da formação de capitaes, não mantivessem certo equilibrio.

Cumpre portanto examinar a possibilidade da taxa do juro e se tal taxa se pode manter, sujeitando tudo ao calculo reflectido, antes de dar ouvidos a certos alchimistas do credito e das operações aleatorias: para não nos acharmos muito sorprendidos ante a irrealização de chimeras que tinhão sido admittidas sem criterio.

Como sorpresa em assumptos desta ordem ainda que em sentido inverso, cabe aqui memorar a curiosa anedocta referida a respeito do jogo do xadrez, que o inventor indiano dedicou ao seu rei. O rei muito satisfeito disse ao inventor que queria recompensal-o como quem era, e que elle mesmo fixasse a recompensa. O inventor pediu o trigo que resultasse da collocação de 1 grão na primeira casa do xadrez, e em cada uma das outras até a sexagesima quarta o dobro da precedente. O rei quasi se impacientou com a exiguidade do pedido. Mas qual foi o seu espanto quando lhe fizerão vêr que nem todos os celleiros do mundo bastarião para satisfazer tal pedido!?

A somma dos grãos de trigo é evidentemente a somma de uma progressão geometrica de 64 termos de que o primeiro é 1 e a razão 2; e que se obtem pelo processo do § 1º da Secç. II.

$$1+2+2^2+2^3+2^4\ldots\ldots+2^{(64-1)}$$

Logo,

$$\frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64}-1 = 18\,446744\,073709\,551615.$$

Para ter este numero, multiplica-se 16 (4ª potencia de 2) por si mesmos para obter a 8ª potencia; esta por si mesma para obter a 16ª; esta por si mesma para obter a 32ª; e esta por si mesma para obter a 64ª e ultima potencia, de que se subtrahe 1.

Tem-se achado que 261000 grãos de trigo dão o pezo de 1 myriagramma (10 kilogrammas). Logo, seria preciso entregar ao inventor o pezo de 70 677180 359040 myriagrammas de trigo.

Avaliando em 1$000 réis (moeda brazileira) cada 10 kilogrammas, seria a importancia total do trigo, Rs. 70.677:180.359:040$000. Isto é, mais de 70,677 milhões de contos de réis ! ! !

E' para lamentar que mesmo entre pessoas letradas haja uma especie de horror pelo calculo algebrico. E no emtanto, que vantagens proporciona e que erros evita a sua pratica !

Parece-me que contribuiria para dissipar este horror, e vulgarizar a pratica do calculo, o ensino nas escolas primarias dos rudimentos da arithmetica com os signaes algebricos. E em lugar do preceito rotineiramente apresentado, *que para tal conta multiplica-se por tanto e divide-se por tanto*, fazer perceber as relações entre os numeros sobre que versa a questão, e estabelecer uma igualdade que dê o valor da incognita; emfim lançar as sementes da analyse. Parece-me que se daria assim uma certa feição aos espiritos, tornando-os geralmente aptos para o calculo, o que traria immensos beneficios á sociedade.

No estado actual, refractarios como são os espiritos a tudo o que cheira a calculo analytico, veem-se mesmo pessoas illustradas maravilharem-se e ficarem incredulas se se enuncião phenomenos a que ellas estão continuamente submettidas; se se lhes diz por exemplo, que cada um de nós supporta de todas as direcções um pezo de pouco mais ou menos 15500 kilogrammas de ar athmospherico. No emtanto, se reparassem no barometro em que o ar athmospherico faz equilibrio a uma columna de mercurio de 76 centimetros de alto, observarião que esta columna, tendo 1 centimetro quadrado de base, dá 76 centimetros cubicos, que, se fossem d'agoa pezarião 76 grammas (1 gramma iguala 1 centimetro cubico de agua pura). Ora, como o mercurio peza mais 13.6, segue-se que o pezo da columna de mercurio é $76 \times 13.6 = 1033$ grammas.

A superficie de 1 metro quadrado tem 10000 centimetros qua-

drados; portanto em um metro quadrado cabem ao alto 10000 columnas de mercurio de 1033 grammas, o que dá um pezo de 10330 kilogrammas.

Tem-se avaliado em um metro quadrado e meio a superficie total (termo medio) do corpo humano: Logo, como a pressão do ar se faz em todos os sentidos, um homem supporta, pouco mais ou menos, 15500 kilogrammas de ar athmospherico. O maravilhoso cessa, quando se considera a pressão que supporta o peixe mergulhado na agoa.

Como uma diversão, e para familiarizar o espirito com a comparação dos grandes numeros, notaremos o calculo das variações e permutações que se podem fazer com certo numero de coisas. Ha resultados que espantão aos que não tem a pratica do calculo. Calculo ás vezes bem simples. Que se pergunte em que tempo 12 pessoas podem alternar os lugares, fazendo todas as permutações possiveis entre si, admittindo que gastem ¼ de minuto em cada permutação, e trabalhem 12 horas por dia, sendo as outras 12 para descanso. Parecerá que isto não será obra de muitos mezes.

Pois vejamos.

Cada uma destas 12 pessoas podendo permutar o seu lugar com cada uma das outras, teremos,

12×11 permutações duas a duas.

Cada um destes grupos podendo permutar o seu lugar com cada uma das pessoas restantes, teremos,

$12 \times 11 \times 10$ permutações tres a tres.

E assim por diante; de maneira que o total das permutações que podem fazer as 12 pessoas, 12 a 12, será,

$$12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 479001600,$$

e que exigem 119750400 minutos empregados, segundo a hypothese, em trabalho effectivo.

12 horas de trabalho por dia dão 262980 minutos de trabalho por anno (de 365 dias e 6 horas); e portanto,

$$\frac{119750400}{262980} = 455\frac{359}{1000}$$

Isto é, 455 annos, 4 mezes e 1 semana!

Fica entendido que metade deste tempo é que é de trabalho effectivo; sendo a outra metade de descanso.

Não ha nada mais verdadeiro; mas é impossivel de realizar: começando por ser preciso que a vida humana fosse 10 vezes mais longa!

Assim é com os juros accumulados : podemos fazer maravilhosas combinações; mas é necessario examinar se a producção das riquezas é susceptivel da mesma progressão.

Pouca attenção se terá dado talvez á relação em que está uma gotta de medicamento á porção d'agoa em que se acha diluida, na 30ª dynamisação homœopathica.

Pois examinemos :

Na primeira diluição, 100 gottas de liquido contem uma de medicamento ; portanto,

$$\frac{1}{100}$$

1 gotta desta primeira diluição, dilue-se em 99 gottas d'agoa pura; é um centesimo de medicamento em $99\frac{99}{100}$ gottas de agoa : o que dá a relação de 1 para 10000 na preparação, ou

$$\frac{1}{100^2}$$

N'uma terceira diluição ha a relação de 1 para 1000000, ou

$$\frac{1}{100^3}$$

e assim por diante, até que na 30ª e ultima diluição ha a relação

$$\frac{1}{100^{30}}$$

Procuremos agora a relação de 1 gotta de medicamento á esphera d'agoa necessaria, se quizessemos fazer a diluição logo de uma vez.

Avaliemos cada gotta em uma esphera de 1 millimetro de raio. Sabe-se em geometria que os volumes das espheras são entre si como os cubos dos raios; neste caso,

1 gotta de medicamento : 100^{30} gottas da preparação :: 1 : x^3

Logo

$$x^3 = 100^{30}$$

Donde,

$$x = 100^{10}$$

O raio da esphera da preparação é de 100 000000 000000 000000 millimetros.

1 legoa metrica tendo 4000000 de millimetros, segue-se que o raio tem a extensão de

25 000000 000000 legoas.

Como nesta esphera da preparação ha só uma gotta de medicamento, pode-se desprezar a subtracção por ser quasi nulla, e dizer que uma gotta de medicamento de 1 millimetro de raio deveria ser di-

luida n'uma esphera d'agoa de 25 milhões de milhões de legoas de raio, extensão triplice da distancia que nos separa das primeiras estrellas!

O diametro de uma tal esphera seria de 50 milhões de milhões de legoas.

A luz percorre 77000 legoas metricas em cada segundo: com esta velocidade, que apenas a imaginação pode conceber, ella levaria 20 annos, 6 mezes e 27 dias a percorrer o diametro da esphera d'agoa!

O som, com uma velocidade de 340 metros por segundo, levaria 186400 seculos e 51 annos.

Uma locomotiva com uma velocidade, em caminho de ferro, de 60 kilometros por hora, levaria 3.802.570 seculos e 53 annos!!!

NOTA — D

(*Vide Secção II § 9.º*)

PAGAMENTO EM QUANTIAS IGUAES A DIVERSOS PRAZOS COM JUROS SIMPLES

Em juros simples é analogo ao assumpto do § 9º da Secç. II o caso em que se pretenda solver uma quantia devida C por meio de um certo numero de pagamentos iguaes x, a diversos prazos. Que estes prazos sejão α, β, γ, ... ν, referidos á mesma unidade de tempo relativo aos juros.

Teremos a equação:

$$x \times \left(\frac{1}{1+\alpha t'} + \frac{1}{1+\beta t'} + \frac{1}{1+\gamma t'} \ldots\ldots + \frac{1}{1+\nu t'} \right) = C.$$

Determina-se t' segundo a unidade de tempo dos prazos. Sendo t a taxa do juro annual, observar-se-ha:

Se os prazos forem a dias, $t' = \frac{t}{360}$ ou $\frac{t}{365}$

Se forem a mezes, $t' = \frac{t}{12}$

Se forem a annos, $t' = t$.

Exemplo. — *Seja a divida de 200:000$000 que se ajuste solver em 6 pagamentos iguaes de 6 em 6 mezes com os juros simples de 9 % ao anno: de que importancia deve ser cada pagamento?*

Neste caso,

$C = 200000000$; α, β, γ.....ν, correspondem a 6, 12, 18, 24, 30 e 36 mezes; e $t' = \frac{0.09}{12} = 0.0075$.

Portanto,

$$x \times \left(\frac{1}{1.045} + \frac{1}{1.09} + \frac{1}{1.135} + \frac{1}{1.18} + \frac{1}{1.225} + \frac{1}{1.27} \right) = 200000000.$$

$$x = \frac{200000000}{5.206612} = \text{Rs. } 38:412\$695.$$

Com effeito, este pagamento constante descontado por 6, 12, 18, 24, 30 e 36 mezes, dá o valor actual,

	36:758$560
	35:241$000
	33:843$790
	32:553$130
	31:357$300
	30:246$220
Rs.	200:000$000

O emprego dos logarithmos facilita muito esta operação, obtendo-se a somma das fracções por meio do compl. log. de cada denominador (Veja-se a NOTA no final do § 1º da Secç. I).

EXEMPLO :

Logarithmos	*Numeros*
Compl. log (1.045) = $\bar{1}$.9808837	0.956938
Compl. log (1.09) = $\bar{1}$.9625735	0.917431
Compl. log (1.135) = $\bar{1}$.9450041	0.881057
Compl. log (1.18) = $\bar{1}$.9281180	0.847458
Compl. log (1.225) = $\bar{1}$.9118639	0.816326
Compl. log (1.27) = $\bar{1}$.8961963	0.787402
Divisor do capital	5.206612

NOTA — E

(*Vide Secção III § 10.º*)

PROBABILIDADES — COMBINAÇÕES E PERMUTAÇÕES

Para satisfazer os curiosos, e demonstrar a procedencia da regra dada no § 10º da 3ª Secção, faremos o calculo das probabilidades de serem sorteadas até á epoca em que ficará amortizado metade do capital hoje

devido, as obrigações que possuimos de uma emissão por emprestimo amortizavel.

Primeiramente é preciso recordar que o numero de combinações que se podem fazer com n coisas tomadas m a m, e em que cada coisa só pode entrar uma vez em cada combinação, mas sem distincção de ordem, é:

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdots\cdots\frac{n-m+1}{m}.$$

Tomemos o mesmo caso do § 10°, de 1000 contos mutuados a 6 $^1/_2$ por cento de juro e 1 por cento de amortização, tendo-se emittido 5000 obrigações de 200$000; no fim do 15.° anno estão amortizados 241:821$693, correspondendo a 1209 obrigações resgatadas, e faltão amortizar Rs. 758:178$307, ou 3791 obrigações que estão em circulação. Destas, compro 10 e desejo saber as probabilidades de serem sorteadas desde 1 a 10, e particularmente pelo menos 5, até ao 11° anno desta data (26° do periodo total da amortização), epoca em que se completaráõ 1976 obrigações sorteadas, correspondendo ao capital de Rs. 395:332$084 amortizado nestes 11 annos (pouco mais de metade do actualmente devido).

Todas as combinações possiveis de 3791 coisas (que tantos são os numeros das obrigações actualmente na urna), tomadas em grupos de 1976 (que tantos serão os numeros extrahidos da urna até ao 11° anno) são, segundo a formula acima, em numero de,

$$\frac{3791.3790.3789\ldots\ldots 1816}{1.2.3\ldots\ldots 1976} \qquad (a)$$

Será este o divisor commum em todas as probabilidades adiante verificadas.

As 3791 obrigações, menos as 10 que possuo, isto é, 3781, tomadas em grupos de 1976, daráõ.

$$\frac{3781.3780\ 3779\ldots\ldots 1806}{1.2.3\ldots\ldots 1976}$$

combinações em que não entra alguma das que possuo.

As mesmas 3781, tomadas successivamente em grupos de 1975, 1974, 1973.... & para se juntarem a cada grupo as que possuo, combinadas 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3... &, daráõ:

Numero de combinações.....	*em que entrão das obrigações que possuo*
$\frac{3781.3780....1807}{1.2.3....1975} \times \frac{10}{1}$	uma
$\frac{3781.3780....1808}{1.2.3....1974} \times \frac{10.9}{1.2}$	duas
$\frac{3781.3780....1809}{1.2.3....1973} \times \frac{10.9.8}{1.2.3}$	tres
$\frac{3781.3780....1810}{1.2.3....1972} \times \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}$	quatro
$\frac{3781.3780....1811}{1.2.3....1971} \times \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}$	cinco
$\frac{3781.3780....1812}{1.2.3....1970} \times \frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6}$	seis
$\frac{3781.3780....1813}{1.2.3....1969} \times \frac{10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6.7}$	sete
$\frac{3781.3780....1814}{1.2.3....1968} \times \frac{10.9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7.8}$	oito
$\frac{3781.3780....1815}{1.2.3....1967} \times \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$	nove
$\frac{3781.3780....1816}{1.2.3....1966} \times \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$	dez

Dividindo cada uma das onze ultimas expressões pela primeira (*a*), eliminando os factores communs ao dividendo e ao divisor, acharemos as seguintes probabilidades de serem sorteadas as obrigações que possuo:

Nenhuma..	0,0006
1.....	0,0068
2.....	0,0336
3.....	0,0979
4.....	0,1868
5.....	0,2442
6.....	0,2215
7.....	0,1376
8.....	0,0560
9.....	0,0135
10.....	0,0015
Somma.	1

Com effeito, sendo a propabilidade a relação dos casos particulares á totalidade dos casos possiveis, a somma de todas as probabilidades tanto favoraveis como contrarias deve ser igual a 1, que é a expressão da certeza. Neste caso, é certo que, ou não ha de ser sorteada nenhuma, ou seráõ sorteadas 1, 2 até 10, das minhas 10 obrigações.

Vê-se que a probabilidade de serem sorteadas precisamente 5 obrigações é 0,2442; mas se sommarmos as probabilidades de 5 até 10, acharemos que a probabilidade de o serem, pelo menos 5 obrigações é $0,6743 > 1/2$: o que confirma a regra do § 10°.

Para as precedentes multiplicações e divisões, que pelos meios ordinarios serião impraticaveis, servi-me da formula de *Stirling* de que abaixo fallarei.

Resta demonstrar que sempre que se completar o sorteio de metade das obrigações actualmente em circulação haverá uma probabilidade maior que $1/2$ de que pelo menos metade das que possuimos terão sido sorteadas.

Seja:

m, o numero de obrigações que possuimos;

n, o restante das obrigações em circulação;

s, o numero de obrigações que o sorteio completa.

Pela hypothese, $s = \frac{m+n}{2}$.

Que $m<n$.

Na expressão do numero de combinações dos grupos mais pequenos, o grupo iguala $(s-m)$: para que juntando-se-lhe as m obrigações, complete o grupo s em que são tomadas todas as combinações.

Esta expressão é:

$$\frac{n.(n-1).(n-2).....[n-(s-m)+1]}{1.2.3..... ....(s-m)}.$$

Note-se que pela hypothese, $\frac{n-(s-m)+1}{s-m} = \frac{s+1}{s-m}$.

As combinações em grupos com o incremento 1 até m, obtem-se multiplicando:

A expressão acima por $\frac{s+1-1}{s-m+1} = \frac{s}{s-m+1}$, para a primeira seguinte.

A primeira seguinte por $\frac{s+1-2}{s-m+2} = \frac{s-1}{s-m+2}$, para a segunda.

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

A ante-penultima, por $\frac{s+1-(m-1)}{s-m+(m-1)}=\frac{s-m+2}{s-1}$, para a penultima.

A penultima, por $\frac{s+1-m}{s-m+m}=\frac{s-m+1}{s}$, para a ultima.

O que põe em evidencia a lei identica do crescimento e decrescimento.

A mesma demonstração tem lugar a respeito das combinações de m obrigações, que são os coefficientes do binomio de Newton.

Segue-se, que:

Os successos favoraveis e contrarios (todos os casos possiveis), serão em numero de $(m+1)$, e sommaráõ todos 1.

O termo medio em numero impar de casos, será o maior; os dois medios em numero par de casos, serão iguaes, e os maiores.

Quando os casos forem muitos (como no § 10°), a razão de crescimento e decrescimento será menor visto ter de repartir-se mais; assim como os meios serão relativamente menores: mas sempre a somma de metade dos casos será igual a $^1/_2$; ou de metade dos casos mais 1, maior que $^1/_2$.

No exemplo acima não se verificão precisamente estas leis pela razão de que o 11° sorteio resgata um pouco mais de metade do capital: porem eu quiz cingir-me ao exemplo do § 10°, sendo certo que o sorteio mais proximo em que se amortiza metade do capital actual, occasiona pequena perturbação, que não altera a regra do mesmo §.

Se $m>n$, põe-se m em lugar de n e *vice-versa*; e obtem-se as probabilidades de serem sorteadas s, $s-1$, $s-2$, ... $s-n$ das m obrigações que possuimos.

Vou reproduzir aqui, pela sua alta importancia, a formula de *Stirling* que dá immediatamente a somma dos logarithmos dos numeros naturaes desde 1 até um numero qualquer, x. Eil-a:

$$l\,1+l\,2+l\,3\;\ldots\ldots+l\,x=\frac{1}{2}\,l\,2\pi+\left(x+\frac{1}{2}\right)l\,x-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\text{etc.}$$

π indica a relação da circumferencia ao diametro $=3.1415926536$. São neperianos os logarithmos indicados nesta equação: para fazer uso dos logarithmos vulgares, deveráõ multiplicar-se pelo modulo 0,4342944819 os termos em que não entra logarithmo.

Por esta formula podem-se verificar as probabilidades precedentes.

Note-se que os numeradores das fracções precedentes dão as *permutações* que se podem fazer, admittindo o comparecimento em cada grupo de cada coisa tantas vezes quantas são as mudanças de posição

relativamente ás outras. Tal é o caso da *permutação* de lugares de 12 pessoas entre si, apresentado na NOTA (*c*).

Para exercicio da formula precedente, façamos o calculo curioso de quantas permutações se podem fazer com 3791 coisas?

E' preciso obter o seguinte producto:

$$3791.3790.3789 \ldots\ldots\ldots\ldots 1;$$

impraticavel pelos meios ordinarios; mas a formula dá-nos a somma dos logarithmos destes numeros.

Neste caso, $x = 3791$; e omitto o 5º termo, por limitar-me a logarithmos de 8 decimaes.

Eis aqui o calculo:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \times \log 2\pi &= + \quad 0.39908993 \\ 3791{,}5 \times \log 3791 &= + \; 13568.84497365 \\ -\,0{,}4342944819 \times \left(3791 - \frac{1}{45492}\right) &= - \; 1646.41037135 \\ \text{Resulta o logarithmo} &= \quad 11922.83369223 \end{aligned}$$

Isto é, um numero composto de 11923 algarismos!

Procurando as 7 primeiras letras, acha-se que o numero está entre 6818553 e 6818554 seguidos cada um de 11916 zeros.

As *combinações* da primeira expressão (*a*), isto é, de 3791 coisas tomadas em grupos de 1976, obtem-se pelo mesmo processo applicado tanto ao numerador como ao denominador:

$$\begin{aligned} +\log(3791.3790.3789 \ldots 1816) &= + \; 6794.18854639 \\ -\log(1.2.3 \ldots 1976) &= - \; 5656.35609942 \\ \text{Resulta o logarithmo} &= \; 1137.83244697 \end{aligned}$$

Isto é, um numero composto de 1138 algarismos, que se comprehenderá entre 6799030 e 6799031, seguidos cada um de 1131 zeros!

Por aqui se vê como se podem obter entre grandes numeros, relações sufficientemente approximadas.

Quem desejar instruir-se neste interessante ramo das mathematicas applicadas á avaliação das probabilidades, pode consultar entre outros, *Laplace*, *Théorie analytique des probabilités*, e *Lacroix*, *Traité élémentaire du calcul des probabilités*.

TABOAS

OBSERVAÇÃO

As Taboas I até VI e Supplementos, são calculadas para o capital ou annuidade 1, com 7 e 8 decimaes: *basta, portanto, multiplicar a quantia proposta pela quantidade tabular respectiva, e cortar ao resultado tantas letras quantas forem as que se acharem á direita do ponto para ter o valor buscado.*

No alto de cada columna (excepto no 2º Supplemento á Taboa I e Supplemento á Taboa II nos quaes é á margem), está indicada a taxa do juro que deve compor-se annualmente; e ao lado esquerdo das linhas o numero de annos: onde coincidir, segundo a proposta, a horizontal dos annos com a perpendicular da taxa, se achará o multiplicador competente.

TABOA — I

Esta Taboa mostra o valor que o capital 1 tem adquirido no fim do numero de annos indicado no mesmo alinhamento á esquerda (desde 1 até 100), juntando-se-lhe o juro composto á taxa indicada no alto da columna. A sua expressão (veja-se Secç. I, § 1º) é:

$$r^n.$$

Com 8 decimaes.

TAXAS (58 DIVERSAS):

			1/2,	3/4,			
1,	1 1/8,	1 1/4,	1 3/8,	1 1/2,	1 5/8,	1 3/4,	1 7/8,
2,	2 1/8,	2 1/4,	2 3/8,	2 1/2,	2 5/8,	2 3/4,	2 7/8,
3,	3 1/8,	3 1/4,	3 3/8,	3 1/2,	3 5/8,	3 3/4,	3 7/8,
4,	4 1/8,	4 1/4,	4 3/8,	4 1/2,	4 5/8,	4 3/4,	4 7/8,
5,		5 1/4,		5 1/2,		5 3/4,	
6,		6 1/4,		6 1/2,		6 3/4,	
7,		7 1/4,		7 1/2,		7 3/4,	
8,		8 1/4,		8 1/2,		8 3/4,	
9,		9 1/4,		9 1/2,		9 3/4,	
10,		10 1/2,		11,		12,	

Obtem-se os logarithmos das quantidades d'esta Taboa, multiplicando os logarithmos de 1 com o seu juro á taxa respectiva (fornecidos pela Taboa VII) pelo numero de annos:

$$\log r^n = n. \log (1+i).$$

Annos	1/2 %	3/4 %	Annos	1/2 %	3/4 %
1	1.0050 0000	1.0075 0000	51	1.2896 4194	1.4638 5411
2	1.0100 2500	1.0150 5625	52	1.2960 9015	1.4748 3301
3	1.0150 7513	1.0226 6917	53	1.3025 7060	1.4858 9426
4	1.0201 5050	1.0303 3919	54	1.3090 8346	1.4970 3847
5	1.0252 5125	1.0380 6673	55	1.3156 2887	1.5082 6626
6	1.0303 7751	1.0458 5224	56	1.3222 0702	1.5195 7825
7	1.0355 2940	1.0536 9613	57	1.3288 1805	1.5309 7509
8	1.0407 0704	1.0615 9885	58	1.3354 6214	1.5424 5740
9	1.0459 1058	1.0695 6084	59	1.3421 3946	1.5540 2583
10	1.0511 4013	1.0775 8255	60	1.3488 5015	1.5656 8103
11	1.0563 9583	1.0856 6441	61	1.3555 9440	1.5774 2363
12	1.0616 7781	1.0938 0690	62	1.3623 7238	1.5892 5431
13	1.0669 8620	1.1020 1045	63	1.3691 8424	1.6011 7372
14	1.0723 2113	1.1102 7553	64	1.3760 3016	1.6131 8252
15	1.0776 8274	1.1186 0259	65	1.3829 1031	1.6252 8139
16	1.0830 7115	1.1269 9211	66	1.3898 2486	1.6374 7100
17	1.0884 8651	1.1354 4455	67	1.3967 7399	1.6497 5203
18	1.0939 2894	1.1439 6039	68	1.4037 5785	1.6621 2517
19	1.0993 9858	1.1525 4009	69	1.4107 7664	1.6745 9111
20	1.1048 9558	1.1611 8414	70	1.4178 3053	1.6871 5055
21	1.1104 2006	1.1698 9302	71	1.4249 1968	1.6998 0418
22	1.1159 7216	1.1786 6722	72	1.4320 4428	1.7125 5271
23	1.1215 5202	1.1875 0723	73	1.4392 0450	1.7253 9685
24	1.1271 5978	1.1964 1353	74	1.4464 0052	1.7383 3733
25	1.1327 9558	1.2053 8663	75	1.4536 3252	1.7513 7486
26	1.1384 5955	1.2144 2703	76	1.4609 0069	1.7645 1017
27	1.1441 5185	1.2235 3523	77	1.4682 0519	1.7777 4400
28	1.1498 7261	1.2327 1175	78	1.4755 4622	1.7910 7708
29	1.1556 2197	1.2419 5709	79	1.4829 2395	1.8045 1015
30	1.1614 0008	1.2512 7176	80	1.4903 3857	1.8180 4398
31	1.1672 0708	1.2606 5630	81	1.4977 9026	1.8316 7931
32	1.1730 4312	1.2701 1122	82	1.5052 7921	1.8454 1691
33	1.1789 0833	1.2796 3706	83	1.5128 0561	1.8592 5753
34	1.1848 0288	1.2892 3434	84	1.5203 6964	1.8732 0196
35	1.1907 2689	1.2989 0359	85	1.5279 7148	1.8872 5098
36	1.1966 8052	1.3086 4537	86	1.5356 1134	1.9014 0536
37	1.2026 6393	1.3184 6021	87	1.5432 8940	1.9156 6590
38	1.2086 7725	1.3283 4866	88	1.5510 0585	1.9300 3339
39	1.2147 2063	1.3383 1128	89	1.5587 6087	1.9445 0865
40	1.2207 9424	1.3483 4861	90	1.5665 5468	1.9590 9246
41	1.2268 9821	1.3584 6123	91	1.5743 8745	1.9737 8565
42	1.2330 3270	1.3686 4969	92	1.5822 5939	1.9885 8905
43	1.2391 9786	1.3789 1456	93	1.5901 7069	2.0035 0346
44	1.2453 9385	1.3892 5642	94	1.5981 2154	2.0185 2974
45	1.2516 2082	1.3996 7584	95	1.6061 1215	2.0336 6871
46	1.2578 7892	1.4101 7341	96	1.6141 4271	2.0489 2123
47	1.2641 6832	1.4207 4971	97	1.6222 1342	2.0642 8814
48	1.2704 8916	1.4314 0533	98	1.6303 2449	2.0797 7030
49	1.2768 4161	1.4421 4087	99	1.6384 7611	2.0953 6858
50	1.2832 2581	1.4529 5693	100	1.6466 6849	2.1110 8384

Annos	1 %	1 1/8 %	Annos	1 %	1 1/8 %
1	1.0100 0000	1.0112 5000	51	1.6610 7814	1.7692 3395
2	1.0201 0000	1.0226 2656	52	1.6776 8892	1.7891 3784
3	1.0303 0100	1.0341 3111	53	1.6944 6581	1.8092 6564
4	1.0406 0401	1.0457 6509	54	1.7114 1047	1.8296 1988
5	1.0510 1005	1.0575 2994	55	1.7285 2457	1.8502 0310
6	1.0615 2015	1 0694 2716	56	1.7458 0982	1.8710 1788
7	1.0721 3535	1.0814 5821	57	1.7632 6792	1.8920 6684
8	1.0828 5671	1.0936 2462	58	1.7809 0060	1.9133 5259
9	1.0936 8527	1.1059 2789	59	1.7987 0960	1.9348 7780
10	1.1046 2213	1.1183 6958	60	1.8166 9670	1.9566 4518
11	1.1156 6835	1.1309 5124	61	1.8348 6367	1.9786 5744
12	1.1268 2503	1.1436 7444	62	1.8532 1230	2.0009 1733
13	1.1380 9328	1.1565 4078	63	1.8717 4443	2.0234 2765
14	1.1494 7421	1.1695 5186	64	1.8904 6187	2.0461 9121
15	1.1609 6896	1.1827 0932	65	1.9093 6649	2.0692 1087
16	1.1725 7864	1.1960 1480	66	1.9284 6015	2.0924 8949
17	1.1843 0443	1.2094 6997	67	1.9477 4475	2.1160 2999
18	1.1961 4748	1.2230 7650	68	1.9672 2220	2.1398 3533
19	1.2081 0895	1.2368 3611	69	1.9868 9442	2.1639 0848
20	1.2201 9004	1.2507 5052	70	2.0067 6337	2.1882 5245
21	1.2323 9194	1.2648 2146	71	2.0268 3100	2.2128 7029
22	1.2447 1586	1.2790 5071	72	2.0470 9931	2.2377 6508
23	1.2571 6302	1.2934 4003	73	2.0675 7031	2.2629 3994
24	1.2697 3465	1.3079 9123	74	2.0882 4601	2.2883 9801
25	1.2824 3199	1 3227 0613	75	2.1091 2847	2.3141 4249
26	1.2952 5631	1.3375 8657	76	2.1302 1975	2.3401 7659
27	1.3082 0888	1.3526 3442	77	2.1515 2195	2.3665 0358
28	1.3212 9097	1.3678 5156	78	2.1730 3717	2.3931 2675
29	1.3345 0388	1.3832 3989	79	2.1947 6754	2.4200 4942
30	1.3478 4892	1.3988 0134	80	2.2167 1522	2.4472 7498
31	1.3613 2740	1.4145 3785	81	2.2388 8237	2.4748 0682
32	1.3749 4068	1.4304 5140	82	2.2612 7119	2.5026 4840
33	1.3886 9009	1.4465 4398	83	2.2838 8390	2.5308 0319
34	1.4025 7699	1.4628 1760	84	2.3067 2274	2.5592 7473
35	1.4166 0276	1.4792 7430	85	2.3297 8997	2.5880 6657
36	1.4307 6878	1.4959 1613	86	2.3530 8787	2.6171 8232
37	1.4450 7647	1.5127 4519	87	2.3766 1875	2.6466 2562
38	1.4595 2724	1.5297 6357	88	2.4003 8494	2.6764 0016
39	1.4741 2251	1.5469 7341	89	2.4243 8879	2.7065 0966
40	1.4888 6373	1.5643 7687	90	2.4486 3267	2.7369 5789
41	1.5037 5237	1.5819 7611	91	2.4731 1900	2.7677 4867
42	1.5187 8989	1.5997 7334	92	2.4978 5019	2.7988 8584
43	1.5339 7779	1.6177 7079	93	2.5228 2869	2.8303 7331
44	1.5493 1757	1.6359 7071	94	2.5480 5698	2.8622 1501
45	1.5648 1075	1.6543 7538	95	2.5735 3755	2.8944 1492
46	1.5804 5885	1.6729 8710	96	2.5992 7293	2.9269 7709
47	1.5962 6344	1.6918 0821	97	2.6252 6565	2.9599 0559
48	1.6122 2608	1.7108 4105	98	2.6515 1831	2.9932 0452
49	1.6283 4834	1.7300 8801	99	2.6780 3349	3.0268 7807
50	1.6446 3182	1.7495 5150	100	2.7048 1383	3.0609 3045

Annos	1 1/1 %	1 3/8 %	Annos	1 1/4 %	1 3/8 %
1	1.0125 0000	1.0137 5000	51	1.8842 8515	2.0066 6201
2	1.0251 5625	1.0276 8906	52	1.9078 3872	2.0342 5361
3	1.0379 7070	1.0418 1979	53	1.9316 8670	2.0622 2460
4	1.0509 4534	1.0561 4481	54	1.9558 3279	2.0905 8019
5	1.0640 8215	1.0706 6680	55	1.9802 8070	2.1193 2565
6	1.0773 8318	1.0853 8847	56	2.0050 3420	2.1484 6639
7	1.0908 5047	1.1003 1256	57	2.0300 9713	2.1780 0780
8	1.1044 8610	1.1154 4186	58	2.0554 7335	2.2079 5541
9	1.1182 9218	1.1307 7918	59	2.0811 6676	2.2383 1480
10	1.1322 7083	1.1463 2740	60	2.1071 8135	2.2690 9163
11	1.1464 2422	1.1620 8940	61	2.1335 2111	2.3002 9164
12	1.1607 5452	1.1780 6813	62	2.1601 9013	2.3319 2065
13	1.1752 6395	1.1942 6656	63	2.1871 9250	2.3639 8456
14	1.1899 5475	1.2106 8773	64	2.2145 3241	2.3964 8934
15	1.2048 2918	1.2273 3469	65	2.2422 1407	2.4294 4107
16	1.2198 8955	1.2442 1054	66	2.2702 4174	2.4628 4589
17	1.2351 3817	1.2613 1843	67	2.2986 1976	2.4967 1002
18	1.2505 7739	1.2786 6156	68	2.3273 5251	2.5310 3978
19	1.2662 0961	1.2962 4316	69	2.3564 4442	2.5658 4158
20	1.2820 3723	1.3140 6650	70	2.3858 9997	2.6011 2190
21	1.2980 6270	1.3321 3492	71	2.4157 2372	2.6368 8732
22	1.3142 8848	1.3504 5177	72	2.4459 2027	2.6731 4453
23	1.3307 1709	1.3690 2048	73	2.4764 9427	2.7099 0026
24	1.3473 5105	1.3878 4451	74	2.5074 5045	2.7471 6139
25	1.3641 9294	1.4069 2738	75	2.5387 9358	2.7849 3486
26	1.3812 4535	1.4262 7263	76	2.5705 2850	2.8232 2771
27	1.3985 1092	1.4458 8388	77	2.6026 6011	2.8620 4710
28	1.4159 9230	1.4657 6478	78	2.6351 9336	2.9014 0024
29	1.4336 9221	1.4859 1905	79	2.6681 3327	2.9412 9450
30	1.4516 1336	1.5063 5043	80	2.7014 8494	2.9817 3730
31	1.4697 5853	1.5270 6275	81	2.7352 5350	3.0227 3618
32	1.4881 3051	1.5480 5986	82	2.7694 4417	3.0642 9881
33	1.5067 3214	1.5693 4569	83	2.8040 6222	3.1064 3291
34	1.5255 6629	1.5909 2419	84	2.8391 1300	3.1491 4637
35	1.5446 3587	1.6127 9940	85	2.8746 0191	3.1924 4713
36	1.5639 4382	1.6349 7539	86	2.9105 3444	3.2363 4328
37	1.5834 9312	1.6574 5630	87	2.9469 1612	3.2808 4300
38	1.6032 8678	1.6802 4633	88	2.9837 5257	3.3259 5459
39	1.6233 2787	1.7033 4971	89	3.0210 4948	3.3716 8646
40	1.6436 1946	1.7267 7077	90	3.0588 1260	3.4180 4715
41	1.6641 6471	1.7505 1387	91	3.0970 4775	3.4650 4530
42	1.6849 6677	1.7745 8343	92	3.1357 6685	3.5126 8967
43	1.7060 2885	1.7989 8396	93	3.1749 5786	3.5609 8916
44	1.7273 5421	1.8237 1999	94	3.2146 4483	3.6099 5276
45	1.7489 4614	1.8487 9614	95	3.2548 2789	3.6595 8961
46	1.7708 0797	1.8742 1708	96	3.2955 1324	3.7099 0897
47	1.7929 4306	1.8999 8757	97	3.3367 0716	3.7609 2021
48	1.8153 5485	1.9261 1240	98	3.3784 1600	3.8126 3287
49	1.8380 4679	1.9525 9644	99	3.4206 4620	3.8650 5657
50	1.8610 2237	1.9794 4464	100	3.4634 0427	3.9182 0110

Annos	1 1/2 %	1 5/8 %	Annos	1 1/2 %	1 5/8 %
1	1.0150 0000	1.0162 5000	51	2.1368 2106	2.2752 4668
2	1.0302 2500	1.0327 6406	52	2.1688 7337	2.3122 1944
3	1.0456 7837	1.0495 4648	53	2.2014 0647	2.3497 9300
4	1.0613 6355	1.0666 0161	54	2.2344 2757	2.3879 7714
5	1.0772 8400	1.0839 3388	55	2.2679 4398	2.4267 8177
6	1.0934 4326	1.1015 4781	56	2.3019 6314	2.4662 1697
7	1.1098 4491	1.1194 4796	57	2.3364 9259	2.5062 9300
8	1.1264 9259	1.1376 3899	58	2.3715 3998	2.5470 2026
9	1.1433 8998	1.1561 2563	59	2.4071 1308	2.5884 0934
10	1.1605 4083	1.1749 1267	60	2.4432 1978	2.6304 7099
11	1.1779 4894	1.1940 0500	61	2.4798 6807	2.6732 1614
12	1.1956 1817	1.2134 0758	62	2.5170 6609	2.7166 5590
13	1.2135 5244	1.2331 2545	63	2.5548 2208	2.7608 0156
14	1.2317 5573	1.2531 6374	64	2.5931 4442	2.8056 6459
15	1.2502 3207	1.2735 2765	65	2.6320 4158	2.8512 5664
16	1.2689 8555	1.2942 2248	66	2.6715 2221	2.8975 8956
17	1.2880 2033	1.3152 5359	67	2.7115 9504	2.9446 7539
18	1.3073 4064	1.3366 2646	68	2.7522 6896	2.9925 2636
19	1.3269 5075	1.3583 4664	69	2.7935 5300	3.0411 5492
20	1.3468 5501	1.3804 1977	70	2.8354 5629	3.0905 7368
21	1.3670 5783	1.4028 5160	71	2.8779 8814	3.1407 9551
22	1.3875 6370	1.4256 4793	72	2.9211 5796	3.1918 3343
23	1.4083 7715	1.4488 1471	73	2.9649 7533	3.2437 0073
24	1.4295 0281	1.4723 5795	74	3.0094 4996	3.2964 1086
25	1.4509 4535	1.4962 8377	75	3.0545 9171	3.3499 7754
26	1.4727 0953	1.5205 9838	76	3.1004 1059	3.4044 1467
27	1.4948 0018	1.5453 0810	77	3.1469 1674	3.4597 3641
28	1.5172 2218	1.5704 1936	78	3.1941 2050	3.5159 5713
29	1.5399 8051	1.5959 3868	79	3.2420 3230	3.5730 9143
30	1.5630 8022	1.6218 7268	80	3.2906 6279	3.6311 5417
31	1.5865 2642	1.6482 2811	81	3.3400 2273	3.6901 6042
32	1 6103 2432	1.6750 1182	82	3.3901 2307	3.7501 2553
33	1.6344 7918	1.7022 3076	83	3.4409 7492	3.8110 6507
34	1.6589 9637	1.7298 9201	84	3.4925 8954	3.8729 9488
35	1.6838 8132	1.7580 0275	85	3.5449 7838	3.9359 3104
36	1.7091 3954	1.7865 7030	86	3.5981 5306	3.9998 8992
37	1.7347 7663	1.8156 0207	87	3.6521 2535	4.0648 8813
38	1.7607 9828	1.8451 0560	88	3.7069 0723	4.1309 4257
39	1.7872 1025	1.8750 8857	89	3.7625 1084	4.1980 7038
40	1.8140 1841	1.9055 5875	90	3 8189 4851	4.2662 8903
41	1.8412 2868	1.9365 2408	91	3.8762 3273	4.3356 1622
42	1.8688 4712	1.9679 9260	92	3.9343 7622	4.4060 6999
43	1.8968 7982	1.9999 7248	93	3.9933 9187	4.4776 6863
44	1.9253 3302	2.0324 7203	94	4.0532 9275	4.5504 3074
45	1.9542 1301	2.0654 9970	95	4.1140 9214	4.6243 7524
46	1.9835 2621	2.0990 6407	96	4.1758 0352	4.6995 2134
47	2.0132 7910	2.1331 7387	97	4.2384 4057	4.7758 8856
48	2.0434 7829	2.1678 3794	98	4.3020 1718	4.8534 9675
49	2.0741 3046	2.2030 6531	99	4.3665 4744	4.9323 6607
50	2.1052 4242	2.2388 6512	100	4.4320 4565	5.0125 1702

Annos	1 3/4 %	1 7/8 %	Annos	1 3/4 %	1 7/8 %
1	1.0175 0000	1.0187 5000	51	2.4224 5274	2.5789 8436
2	1.0353 0625	1.0378 5156	52	2.4648 4566	2.6273 4032
3	1.0534 2411	1.0573 1128	53	2.5079 8046	2.6766 0295
4	1.0718 5903	1.0771 3587	54	2.5518 7012	2.7267 8926
5	1.0906 1656	1.0973 3216	55	2.5965 2785	2.7779 1656
6	1.1097 0235	1.1179 0714	56	2.6419 6708	2.8300 0249
7	1.1291 2215	1.1388 6790	57	2.6882 0151	2.8830 6504
8	1.1488 8178	1.1602 2167	58	2.7352 4503	2.9371 2251
9	1.1689 8721	1.1819 7583	59	2.7831 1182	2.9921 9355
10	1.1894 4449	1.2041 3788	60	2.8318 1628	3.0482 9718
11	1.2102 5977	1.2267 1546	61	2.8813 7306	3.1054 5276
12	1.2314 3931	1.2497 1638	62	2.9317 9709	3.1636 8000
13	1.2529 8950	1.2731 4856	63	2.9831 0354	3.2229 9900
14	1.2749 1682	1.2970 2009	64	3.0353 0785	3.2834 3023
15	1.2972 2786	1.3213 3922	65	3.0884 2574	3.3449 9454
16	1.3199 2935	1.3461 1433	66	3.1424 7319	3.4077 1319
17	1.3430 2811	1.3713 5398	67	3.1974 6647	3.4716 0781
18	1.3665 3111	1.3970 6686	68	3.2534 2213	3.5367 0046
19	1.3904 4540	1.4232 6187	69	3.3103 5702	3.6030 1359
20	1.4147 7820	1.4499 4803	70	3.3682 8827	3.6705 7010
21	1.4395 3681	1.4771 3455	71	3.4272 3331	3.7393 9329
22	1.4647 2871	1.5048 3082	72	3.4872 0990	3.8095 0691
23	1.4903 6146	1.5330 4640	73	3.5482 3607	3.8809 3517
24	1.5164 4279	1.5617 9102	74	3.6103 3020	3 9537 0270
25	1.5429 8054	1.5910 7460	75	3.6735 1098	4.0278 3463
26	1.5699 8269	1.6209 0725	76	3.7377 9742	4.1033 5653
27	1.5974 5739	1.6512 9926	77	3.8032 0888	4.1802 9446
28	1.6254 1290	1.6822 6112	78	3.8697 6503	4.2586 7498
29	1.6538 5762	1.7138 0352	79	3.9374 8592	4.3385 2514
30	1.6828 0013	1.7459 3734	80	4.0063 9192	4.4198 7248
31	1.7122 4913	1.7786 7366	81	4.0765 0378	4.5027 4509
32	1.7422 1349	1.8120 2379	82	4.1478 4260	4 5871 7156
33	1.7727 0223	1.8459 9924	83	4.2204 2984	4.6731 8103
34	1.8037 2452	1.8806 1172	84	4.2942 8737	4.7608 0317
35	1.8352 8970	1.9158 7319	85	4.3694 3740	4.8500 6823
36	1.8674 0727	1.9517 9582	86	4.4459 0255	4.9410 0701
37	1.9000 8689	1.9883 9199	87	4.5237 0584	5.0336 5089
38	1.9333 3841	2.0256 7434	88	4.6028 7070	5.1280 3185
39	1.9671 7184	2.0636 5573	89	4.6834 2093	5.2241 8245
40	2.0015 9734	2.1023 4928	90	4.7653 8080	5.3221 3587
41	2.0366 2530	2.1417 6833	91	4.8487 7496	5.4219 2591
42	2.0722 6624	2.1819 2648	92	4.9336 2853	5.5235 8703
43	2.1085 3090	2.2228 3760	93	5.0199 6703	5.6271 5428
44	2.1454 3019	2.2645 1581	94	5.1078 1645	5.7326 6343
45	2.1829 7522	2.3069 7548	95	5.1972 0324	5.8401 5086
46	2.2211 7728	2.3502 3127	96	5.2881 5429	5.9496 5369
47	2.2600 4789	2.3942 9811	97	5.3806 9699	6.0612 0970
48	2.2995 9872	2.4391 9120	98	5.4748 5919	6.1748 5738
49	2.3398 4170	2.4849 2603	99	5.5706 6923	6.2906 3596
50	2.3807 8893	2.5315 1839	100	5.6681 5594	6.4085 8538

Annos	2 %	2 1/8 %	Annos	2 %	2 1/8 %
1	1.0200 0000	1.0212 5000	51	2.7454 1979	2.9223 7233
2	1.0404 0000	1.0429 5156	52	2.8003 2819	2.9844 7274
3	1.0612 0800	1.0651 1428	53	2.8563 3475	3.0478 9278
4	1.0824 3216	1.0877 4796	54	2.9134 6144	3.1126 6051
5	1.1040 8080	1.1108 6261	55	2.9717 3067	3.1788 0454
6	1.1261 6242	1.1344 6844	56	3.0311 6529	3.2463 5414
7	1.1486 8567	1.1585 7589	57	3.0917 8859	3.3153 3916
8	1.1716 5938	1.1831 9563	58	3.1536 2436	3.3857 9012
9	1.1950 9257	1.2083 3854	59	3.2166 9685	3.4577 3816
10	1.2189 9442	1.2340 1573	60	3.2810 3079	3.5312 1510
11	1.2433 7431	1.2602 3856	61	3.3466 5140	3.6062 5342
12	1.2682 4179	1.2870 1863	62	3.4135 8443	3.6828 8630
13	1.2936 0663	1.3143 6778	63	3.4818 5612	3.7611 4764
14	1.3194 7876	1.3422 9809	64	3.5514 9324	3.8410 7202
15	1.3458 6834	1.3708 2193	65	3.6225 2311	3.9226 9480
16	1.3727 8570	1.3999 5189	66	3.6949 7357	4.0060 5207
17	1.4002 4142	1.4297 0087	67	3.7688 7304	4 0911 8067
18	1.4282 4625	1.4600 8202	68	3.8442 5050	4.1781 1826
19	1.4568 1117	1.4911 0876	69	3.9211 3551	4.2669 0328
20	1.4859 4740	1.5277 9482	70	3.9995 5822	4.3575 7497
21	1.5156 6634	1.5551 5421	71	4.0795 4939	4.4501 7344
22	1.5459 7967	1.5882 0124	72	4.1611 4037	4.5447 3963
23	1.5768 9926	1.6219 5051	73	4.2443 6318	4.6413 1534
24	1.6084 3725	1.6564 1696	74	4.3292 5045	4.7399 4329
25	1.6406 0599	1.6916 1582	75	4.4158 3545	4.8406 6709
26	1.6734 1811	1.7275 6266	76	4.5041 5216	4.9435 3126
27	1.7068 8648	1.7642 7336	77	4.5942 3521	5.0485 8130
28	1.7410 2421	1.8017 6417	78	4.6861 1991	5.1558 6366
29	1.7758 4469	1.8400 5166	79	4.7798 4231	5.2654 2576
30	1.8113 6158	1.8791 5276	80	4.8754 3916	5.3773 1606
31	1.8475 8882	1.9190 8476	81	4.9729 4794	5.4915 8402
32	1.8845 4059	1.9598 6531	82	5.0724 0690	5.6082 8018
33	1.9222 3140	2.0015 1245	83	5.1738 5504	5.7274 5614
34	1.9606 7603	2.0440 4458	84	5.2773 3214	5.8491 6458
35	1.9998 8955	2.0874 8053	85	5.3828 7878	5.9734 5933
36	2.0398 8734	2.1318 3949	86	5.4905 3635	6.1003 9534
37	2.0806 8509	2.1771 4108	87	5.6003 4708	6.2300 2874
38	2.1222 9879	2.2234 0533	88	5.7123 5402	6.3624 1685
39	2.1647 4477	2.2706 5269	89	5.8266 0110	6.4976 1821
40	2.2080 3966	2.3189 0406	90	5.9431 3313	6.6356 9259
41	2.2522 0046	2.3681 8077	91	6.0619 9579	6.7767 0106
42	2.2972 4447	2.4185 0462	92	6.1832 3570	6.9207 0596
43	2.3431 8936	2.4698 9784	93	6.3069 0042	7.0677 7096
44	2.3900 5314	2.5223 8317	94	6.4330 3843	7.2179 6109
45	2.4378 5421	2.5759 8381	95	6.5616 9919	7.3713 4277
46	2.4866 1129	2.6307 2347	96	6.6929 3318	7.5279 8380
47	2.5363 4351	2.6866 2634	97	6.8267 9184	7.6879 5346
48	2.5870 7039	2.7437 1715	98	6.9633 2768	7.8513 2247
49	2.6388 1179	2.8020 2114	99	7.1025 9423	8.0181 6307
50	2.6915 8803	2.8615 6409	100	7.2446 4612	8.1885 4904

Annos	2 1/4 %	2 3/8 %	Annos	2 1/4 %	2 3/8 %
1	1.0225 0000	1.0237 5000	51	3.1104 9244	3.3104 6997
2	1.0455 0625	1.0480 6406	52	3.1804 7852	3.3890 9364
3	1.0690 3014	1.0729 5558	53	3.2520 3929	3.4695 8461
4	1.0930 8332	1.0984 3828	54	3.3252 1017	3.5519 8724
5	1.1176 7769	1.1245 2619	55	3.4000 2740	3.6363 4694
6	1.1428 2544	1.1512 3369	56	3.4765 2802	3.7227 1018
7	1.1685 3901	1.1785 7549	57	3.5547 4990	3.8111 2455
8	1.1948 3114	1.2065 6665	58	3.6347 3177	3.9016 3876
9	1.2217 1484	1.2352 2261	59	3.7165 1324	3.9943 0268
10	1.2492 0343	1.2645 5915	60	3.8001 3479	4.0891 6737
11	1.2773 1050	1.2945 9243	61	3.8856 3782	4.1862 8509
12	1.3060 4999	1.3253 3900	62	3.9730 6467	4.2857 0936
13	1.3354 3612	1.3568 1580	63	4.0624 5862	4.3874 9496
14	1.3654 8343	1.3890 4017	64	4.1538 6394	4.4916 9796
15	1.3962 0680	1.4220 2988	65	4.2473 2588	4.5983 7579
16	1.4276 2146	1.4558 0309	66	4.3428 9071	4.7075 8722
17	1.4597 4294	1.4903 7841	67	4.4406 0576	4.8193 9241
18	1.4925 8716	1.5257 7490	68	4.5405 1939	4.9338 5298
19	1.5261 7037	1 5620 1205	69	4.6426 8107	5.0510 3199
20	1.5605 0920	1.5991 0984	70	4.7471 4140	5.1709 9400
21	1.5956 2066	1.6370 8870	71	4.8539 5208	5.2938 0511
22	1.6315 2212	1.6759 6955	72	4.9631 6600	5.4195 3298
23	1.6682 3137	1.7157 7383	73	5.0748 3723	5.5482 4689
24	1.7057 6658	1.7565 2346	74	5.1890 2107	5.6800 1775
25	1.7441 4632	1.7982 4089	75	5.3057 7405	5.8149 1817
26	1.7833 8962	1.8409 4911	76	5.4251 5396	5.9530 2248
27	1.8235 1588	1.8846 7165	77	5.5472 1993	6.0944 0676
28	1.8645 4499	1.9294 3261	78	5.6720 3237	6.2391 4892
29	1.9064 9725	1.9752 5663	79	5.7996 5310	6.3873 2871
30	1.9493 9344	2.0221 6898	80	5.9301 4530	6.5390 2777
31	1.9932 5479	2.0701 9549	81	6.0635 7357	6.6943 2968
32	2.0381 0303	2.1193 6263	82	6.2000 0397	6.8533 2001
33	2.0839 6034	2.1696 9749	83	6.3395 0406	7.0160 8636
34	2.1308 4945	2.2212 2781	84	6.4821 4290	7.1827 1841
35	2.1787 9356	2.2739 8197	85	6.6279 9112	7.3533 0797
36	2.2278 1642	2.3279 8904	86	6.7771 2092	7.5279 4903
37	2.2779 4229	2.3832 7878	87	6.9296 0614	7.7067 3782
38	2.3291 9599	2.4398 8165	88	7.0855 2228	7.8897 7285
39	2.3816 0290	2.4978 2884	89	7.2449 4653	8.0771 5495
40	2.4351 8897	2.5571 5228	90	7.4079 5782	8.2689 8738
41	2.4899 8072	2.6178 8464	91	7.5746 3688	8.4653 7583
42	2.5460 0528	2.6800 5940	92	7.7450 6621	8.6664 2851
43	2.6032 9040	2.7437 1081	93	7.9193 3020	8.8722 5618
44	2.6618 6444	2.8088 7395	94	8.0975 1512	9.0829 7227
45	2.7217 5639	2.8755 8470	95	8.2797 0921	9.2986 9286
46	2.7829 9590	2.9438 7984	96	8.4660 0267	9.5195 3682
47	2.8456 1331	3.0137 9699	97	8.6564 8773	9.7456 2581
48	2.9096 3961	3.0853 7466	98	8.8512 5871	9.9770 8443
49	2.9751 0650	3.1586 5231	99	9.0504 1203	10.2140 4018
50	2.0420 4640	3.2336 7030	100	9.2540 4630	10.4566 2364

Annos	2 1/2 %	2 5/8 %	Annos	2 1/2 %	2 5/8 %
1	1.0250 0000	1.0262 5000	51	3.5230 3644	3.7489 6751
2	1.0506 2500	1.0531 8906	52	3.6111 1235	3.8473 7791
3	1.0768 9062	1.0808 3528	53	3.7013 9016	3.9483 7158
4	1.1038 1289	1.1092 0720	54	3.7939 2491	4.0520 1633
5	1.1314 0821	1.1383 2389	55	3.8887 7303	4 1583 8176
6	1.1596 9342	1.1682 0489	56	3.9859 9236	4.2675 3928
7	1.1886 8575	1.1988 7027	57	4.0856 4217	4.3795 6219
8	1.2184 0290	1.2303 4062	58	4.1877 8322	4.4945 2569
9	1.2488 6297	1.2626 3706	59	4.2924 7780	4.6125 0699
10	1.2800 8454	1.2957 8128	60	4.3997 8975	4.7335 8530
11	1.3120 8666	1.3297 9554	61	4.5097 8449	4.8578 4191
12	1.3448 8882	1.3647 0267	62	4.6225 2910	4.9853 6027
13	1.3785 1104	1.4005 2612	63	4.7380 9233	5.1162 2597
14	1.4129 7382	1.4372 8993	64	4.8565 4464	5.2505 2690
15	1.4482 9817	1.4750 1879	65	4.9779 5826	5.3883 5324
16	1.4845 0562	1.5137 3803	66	5.1024 0721	5.5297 9751
17	1.5216 1826	1.5534 7365	67	5.2299 6739	5.6749 5469
18	1.5596 5872	1.5942 5234	68	5.3607 1658	5.8239 2225
19	1.5986 5019	1.6361 0146	69	5.4947 3449	5.9768 0021
20	1.6386 1644	1.6790 4912	70	5.6321 0286	6.1336 9122
21	1.6795 8185	1.7231 2416	71	5.7729 0543	6.2947 0061
22	1.7215 7140	1.7683 5617	72	5.9172 2806	6.4599 3650
23	1.7646 1068	1.8147 7552	73	6.0651 5876	6.6295 0984
24	1.8087 2595	1.8624 1338	74	6.2167 8773	6.8035 3447
25	1.8539 4410	1.9113 0173	75	6.3722 0743	6.9821 2725
26	1.9002 9270	1.9614 7340	76	6.5315 1261	7.1654 0809
27	1.9478 0002	2.0129 6208	77	6.6948 0043	7.3535 0005
28	1.9964 9502	2.0658 0233	78	6.8621 7044	7.5465 2943
29	2.0464 0739	2.1200 2964	79	7.0337 2470	7.7446 2583
30	2.0975 6758	2.1756 8042	80	7.2095 6782	7.9479 2225
31	2.1500 0677	2.2327 9203	81	7.3898 0701	8.1565 5521
32	2.2037 5694	2.2914 0282	82	7.5745 5219	8.3706 6479
33	2.2588 5086	2.3515 5215	83	7.7639 1599	8.5903 9474
34	2.3153 2213	2.4132 8039	84	7.9580 1389	8.8158 9260
35	2.3732 0519	2.4766 2900	85	8.1569 6424	9.0473 0978
36	2.4325 3532	2.5416 4051	86	8.3608 8834	9.2848 0166
37	2.4933 4870	2.6083 5858	88	8.5699 1055	9.5285 2771
38	2.5556 8242	2.6768 2799	88	8.7841 5832	9.7786 5156
39	2.6195 7448	2.7470 9472	89	9.0037 6227	10.0353 4116
40	2.6850 6384	2.8192 0596	90	9.2288 5633	10.2987 6887
41	2.7521 9043	2.8932 1012	91	9.4595 7774	10.5691 1155
42	2.8209 9520	2.9691 5688	92	9.6960 6718	10.8465 5073
43	2.8915 2008	3.0470 9725	93	9.9384 6886	11.1312 7268
44	2.9638 0808	3.1270 8355	94	10.1869 3058	11.4234 6859
45	3.0379 0328	3.2091 6950	95	10.4416 0385	11.7233 3464
46	3.1138 5086	3.2934 1020	96	10.7026 4395	12.0310 7218
47	3.1916 9713	3.3798 6221	97	10.9702 1004	12.3468 8782
48	3.2714 8956	3.4685 8360	98	11.2444 6530	12.6709 9363
49	3.3532 7680	3.5596 3392	99	11.5255 7693	13.0036 0721
50	3.4371 0872	3.6530 7431	100	11.8137 1635	13.3449 5190

Annos	2 3/4 %	2 7/8 %	Annos	2 3/4 %	2 7/8 %
1	1.0275 0000	1.0287 5000	51	3.9890 8562	4.2442 6272
2	1.0557 5625	1.0583 2656	52	4.0987 8547	4.3662 8528
3	1.0847 8955	1.0887 5345	53	4.2115 0208	4.4918 1598
4	1.1146 2126	1.1200 5511	54	4.3273 1838	4.6209 5569
5	1.1452 7334	1.1522 5670	55	4.4463 1964	4.7538 0816
6	1.1767 6836	1.1853 8408	56	4.5685 9343	4.8904 8015
7	1.2091 2949	1.2194 6387	57	4.6942 2975	5.0310 8145
8	1.2423 8055	1.2545 2346	58	4.8233 2107	5.1757 2504
9	1.2765 4602	1.2905 9101	59	4.9559 6239	5.3245 2714
10	1.3116 5103	1.3276 9550	60	5.0922 5136	5.4776 0729
11	1.3477 2144	1.3658 6674	61	5.2322 8828	5.6350 8850
12	1.3847 8378	1.4051 3541	62	5.3761 7620	5.7970 9730
13	1.4228 6533	1.4455 3305	63	5.5240 2105	5.9637 6385
14	1.4619 9413	1.4870 9213	64	5.6759 3162	6.1352 2206
15	1.5021 9896	1.5298 4603	65	5.8320 1974	6.3116 0969
16	1.5435 0944	1.5738 2910	66	5.9924 0029	6.4930 6847
17	1.5859 5595	1.6190 7669	67	6.1571 9130	6.6797 4419
18	1.6295 6973	1.6656 2514	68	6.3265 1406	6.8717 8683
19	1.6743 8290	1.7135 1187	69	6.5004 9319	7.0693 5070
20	1.7204 2843	1.7627 7533	70	6.6792 5676	7.2725 9454
21	1.7677 4021	1.8134 5512	71	6.8629 3632	7.4816 8163
22	1.8163 5307	1.8655 9196	72	7.0516 6706	7.6967 7998
23	1.8663 0278	1.9192 2773	73	7.2455 8791	7.9180 6240
24	1.9176 2610	1.9744 0552	74	7.4448 4158	8.1457 0670
25	1.9703 6082	2.0311 6968	75	7.6495 7472	8.3798 9576
26	2.0245 4575	2.0895 6581	76	7.8599 3802	8.6208 1777
27	2.0802 2075	2.1496 4083	77	8.0760 8632	8.8686 6628
28	2.1374 2682	2.2114 4300	78	8.2981 7869	9.1236 4043
29	2.1962 0606	2.2750 2199	79	8.5263 7861	9.3859 4510
30	2.2566 0173	2.3404 2887	80	8.7608 5402	9.6557 9102
31	2.3186 5828	2.4077 1620	81	9.0017 7750	9.9333 9501
32	2.3824 2138	2.4769 3804	82	9.2493 2639	10.2189 8012
33	2.4479 3797	2.5481 5001	83	9.5036 8286	10.5127 7579
34	2.5152 5626	2.6214 0932	84	9.7650 3414	10.8150 1810
35	2.5844 2581	2.6967 7484	85	10.0335 7258	11.1259 4987
36	2.6554 9752	2.7743 0712	86	10.3094 9583	11.4458 2093
37	2.7285 2370	2.8540 6845	87	10.5930 0696	11.7748 8828
38	2.8035 5810	2.9361 2291	88	10.8843 1465	12.1134 1632
39	2.8806 5595	3.0205 3645	89	11.1836 3331	12.4616 7704
40	2.9598 7399	3.1073 7687	90	11.4911 8322	12.8199 5025
41	3.0412 7052	3.1967 1396	91	11.8071 9076	13.1885 2382
42	3.1249 0546	3.2886 1948	92	12.1318 8851	13.5676 9388
43	3.2108 4036	3.3831 6729	93	12.4655 1544	13.9577 6508
44	3.2991 3847	3.4804 3335	94	12.8083 1711	14.3590 5082
45	3.3898 6478	3.5804 9581	95	13.1605 4584	14.7718 7354
46	3.4830 8606	3.6834 3507	96	13.5224 6085	15.1965 6490
47	3.5788 7093	3.7893 3382	97	13.8943 2852	15.6334 6614
48	3.6772 8988	3.8982 7717	98	14.2764 2255	16.0829 2829
49	3.7784 1535	4.0103 5264	99	14.6690 2417	16.5453 1248
50	3.8823 2177	4.1256 5028	100	15.0724 2234	17.0209 9021

Annos	3 %	3 1/8 %	Annos	3 %	3 1/8 %
1	1.0300 0000	1.0312 5000	51	4.5154 2320	4.8035 4695
2	1.0609 0000	1.0634 7656	52	4.6508 8590	4.9536 5779
3	1.0927 2700	1.0967 1021	53	4.7904 1247	5.1084 5959
4	1.1255 0881	1.1309 8240	54	4.9341 2485	5.2680 9896
5	1.1592 7407	1.1663 2560	55	5.0821 4859	5.4327 2705
6	1.1940 5230	1 2027 7327	56	5.2346 1305	5.6024 9977
7	1.2298 7387	1.2403 5994	57	5.3916 5144	5.7775 7789
8	1.2667 7008	1.2791 2119	58	5.5534 0098	5.9581 2720
9	1.3047 7318	1.3190 9372	59	5.7200 0301	6.1443 1867
10	1.3439 1638	1.3603 1540	60	5.8916 0310	6.3363 2863
11	1.3842 3387	1.4028 2526	61	6.0683 5120	6.5343 3890
12	1.4257 6089	1.4466 6355	62	6.2504 0173	6.7385 3699
13	1.4685 3371	1.4918 7178	63	6.4379 1379	6.9491 1627
14	1.5125 8972	1.5384 9278	64	6.6310 5120	7.1662 7615
15	1.5579 6742	1.5865 7068	65	6.8299 8273	7.3902 2228
16	1.6047 0644	1.6361 5101	66	7.0348 8222	7.6211 6673
17	1.6528 4763	1.6872 8073	67	7.2459 2868	7.8593 2819
18	1.7024 3306	1.7400 0825	68	7.4633 0654	8.1049 3220
19	1.7535 0605	1.7943 8351	69	7.6872 0574	8.3582 1133
20	1.8061 1123	1.8504 5800	70	7.9178 2191	8.6194 0543
21	1.8602 9457	1.9082 8481	71	8.1553 5657	8.8887 6185
22	1.9161 0341	1.9679 1871	72	8.4000 1727	9.1665 3566
23	1.9735 8651	2.0294 1617	73	8.6520 1778	9.4529 8990
24	2.0327 9411	2.0928 3542	74	8.9115 7832	9.7483 9583
25	2.0937 7793	2.1582 3653	75	9.1789 2567	10.0530 3320
26	2.1565 9127	2.2256 8142	76	9.4542 9344	10.3671 9049
27	2.2212 8901	2.2952 3397	77	9.7379 2224	10.6911 6519
28	2.2879 2768	2.3669 6003	78	10.0300 5991	11.0252 6410
29	2.3565 6551	2.4409 2753	79	10.3309 6171	11.3698 0361
30	2.4272 6247	2.5172 0651	80	10.6408 9056	11.7251 0997
31	2.5000 8035	2.5958 6922	81	10.9601 1727	12.0915 1966
32	2.5750 8276	2.6769 9013	82	11.2889 2079	12.4693 7965
33	2.6523 3524	2.7606 4607	83	11.6275 8842	12.8590 4776
34	2.7319 0530	2.8469 1626	84	11.9764 1607	13.2608 9300
35	2.8138 6245	2.9358 8239	85	12.3357 0855	13.6752 9591
36	2.8982 7833	3.0276 2872	86	12.7057 7981	14.1026 4891
37	2.9852 2668	3.1222 4212	87	13.0869 5320	14.5433 5668
38	3.0747 8348	3.2198 1218	88	13.4795 6180	14.9978 3658
39	3.1670 2698	3.3204 3131	89	13.8839 4865	15.4665 1897
40	3.2620 3779	3.4241 9479	90	14.3004 6711	15.9498 4769
41	3.3598 9893	3.5312 0088	91	14.7294 8112	16.4482 8043
42	3.4606 9589	3.6415 5091	92	15.1713 6556	16.9622 8919
43	3.5645 1677	3.7553 4937	93	15.6265 0652	17.4923 6073
44	3.6714 5227	3.8727 0404	94	16.0953 0172	18.0389 9700
45	3.7815 9584	3.9937 2604	95	16.5781 6077	18.6027 1566
46	3.8950 4372	4.1185 2998	96	17.0755 0559	19.1840 5053
47	4.0118 9503	4.2472 3404	97	17.5877 7076	19.7835 5210
48	4.1322 5188	4.3799 6011	98	18.1154 0388	20.4017 8811
49	4.2562 1944	4.5168 3386	99	18.6588 6600	21.0393 4399
50	4.3839 0602	4.6579 8492	100	19.2186 3198	21.6968 2349

Annos	3 1/4 %	3 3/8 %	Annos	3 1/4 %	3 3/8 %
1	1.0325 0000	1.0337 5000	51	5.1096 7263	5.4349 0116
2	1.0660 5625	1.0686 3906	52	5.2757 3700	5.6183 2908
3	1.1007 0308	1.1047 0563	53	5.4471 9845	5.8079 4768
4	1.1364 7593	1.1419 8945	54	5.6242 3240	6.0039 6592
5	1.1734 1140	1.1805 3159	55	5.8070 1995	6.2065 9977
6	1.2115 4727	1.2203 7453	56	5.9957 4810	6.4160 7251
7	1.2509 2255	1.2615 6217	57	6.1906 0991	6.6326 1496
8	1.2915 7754	1.3041 3989	58	6.3918 0473	6.8564 6571
9	1.3335 5381	1.3481 5462	59	6.5995 3839	7.0878 7143
10	1.3768 9430	1.3936 5483	60	6.8140 2339	7.3270 8709
11	1.4216 4337	1.4406 9068	61	7.0354 7915	7.5743 7628
12	1.4678 4678	1.4893 1400	62	7.2641 3222	7.8300 1148
13	1.5155 5180	1.5395 7834	63	7.5002 1651	8.0942 7437
14	1.5648 0723	1.5915 3911	64	7.7439 7355	8.3674 5613
15	1.6156 6347	1.6452 5356	65	7.9956 5269	8.6498 5777
16	1.6681 7253	1.7007 8086	66	8.2555 1140	8.9417 9047
17	1.7223 8814	1.7581 8222	67	8.5238 1552	9.2435 7590
18	1.7783 6575	1.8175 2087	68	8.8008 3953	9.5555 4659
19	1.8361 6264	1.8788 6220	69	9.0868 6681	9.8780 4628
20	1.8958 3792	1.9422 7380	70	9.3821 8999	10.2114 3034
21	1.9574 5266	2.0078 2554	71	9.6871 1116	10.5560 6612
22	2.0210 6987	2.0755 8965	72	10.0019 4227	10.9123 3335
23	2.0867 5464	2.1456 4080	73	10.3270 0540	11.2806 2460
24	2.1545 7416	2.2180 5618	74	10.6626 3307	11.6613 4568
25	2.2245 9782	2.2929 1557	75	11.0091 6865	12.0549 1610
26	2.2968 9725	2.3703 0147	76	11.3669 6663	12.4617 6952
27	2.3715 4641	2.4502 9915	77	11.7363 9304	12.8823 5424
28	2.4486 2167	2.5329 9674	78	12.1178 2582	13.3171 3369
29	2.5282 0188	2.6184 8539	79	12.5116 5516	13.7665 8696
30	2.6103 6844	2.7068 5927	80	12.9182 8395	14.2312 0927
31	2.6952 0541	2.7982 1577	81	13.3381 2818	14.7115 1258
32	2.7827 9959	2.8926 5555	82	13.7716 1734	15.2080 2613
33	2.8732 4058	2.9902 8267	83	14.2191 9491	15.7212 9701
34	2.9666 2089	3.0912 0471	84	14.6813 1874	16.2518 9078
35	3.0630 3607	3.1955 3287	85	15.1584 6160	16.8003 9210
36	3.1625 8475	3.3033 8211	86	15.6511 1160	17.3674 0533
37	3.2653 6875	3.4148 7125	87	16.1597 7273	17.9535 5526
38	3.3714 9323	3.5301 2316	88	16.6849 6534	18.5594 8775
39	3.4810 6676	3.6492 6482	89	17.2272 2672	19.1858 7046
40	3.5942 0143	3.7724 2750	90	17.7871 1159	19.8333 9359
41	3.7110 1298	3.8997 4693	91	18.3651 9271	20.5027 7062
42	3.8316 2090	4.0313 6339	92	18.9620 6147	21.1947 3913
43	3.9561 4858	4.1674 2190	93	19.5783 2847	21.9100 6158
44	4.0847 2341	4.3080 7239	94	20.2146 2415	22.6495 2616
45	4.2174 7692	4.4534 6984	95	20.8715 9943	23.4139 4766
46	4.3545 4492	4.6037 7444	96	21.5499 2641	24.2041 6840
47	4.4960 6763	4.7591 5183	97	22.2502 9902	25.0210 5908
48	4.6421 8983	4.9197 7321	98	22.9734 3374	25.8655 1982
49	4.7930 6100	5.0858 1555	99	23.7200 7034	26.7384 8112
50	4.9488 3548	5.2574 6183	100	24.4909 7262	27.6409 0486

Annos	3 1/2 %	3 5/8 %	Annos	3 1/2 %	3 5/8 %
1	1.0350 0000	1.0362 5000	51	5.7803 9930	6.1474 0352
2	1.0712 2500	1.0738 1406	52	5.9827 1327	6.3702 4690
3	1.1087 1787	1.1127 3982	53	6.1921 0824	6.6011 6835
4	1.1475 2300	1.1530 7664	54	6.4088 3202	6.8404 6070
5	1.1876 8631	1.1948 7567	55	6.6331 4114	7.0884 2740
6	1.2292 5533	1.2381 8991	56	6.8653 0108	7.3453 8289
7	1.2722 9726	1.2830 7430	57	7.1055 8662	7.6116 5302
8	1.3168 0904	1.3295 8574	58	7.3542 8215	7.8875 7545
9	1.3628 9735	1.3777 8322	59	7.6116 8203	8.1735 0006
10	1.4105 9876	1.4277 2786	60	7.8780 9090	8.4697 8943
11	1.4599 6972	1.4794 8300	61	8.1538 2408	8.7768 1930
12	1.5110 6866	1.5331 1426	62	8.4392 0793	9.0949 7900
13	1.5639 5606	1.5886 8965	63	8.7345 8020	9.4246 7199
14	1.6186 9452	1.6462 7965	64	9.0402 9051	9.7663 1635
15	1.6753 4883	1.7059 5729	65	9.3567 0068	10.1203 4532
16	1.7339 8604	1.7677 9824	66	9.6841 8520	10.4872 0783
17	1.7946 7555	1.8318 8093	67	10.0231 3168	10.8673 6912
18	1.8574 8920	1.8982 8661	68	10.3739 4129	11.2613 1125
19	1.9225 0132	1.9670 9950	69	10.7370 2924	11.6695 3378
20	1.9897 8886	2.0384 0686	70	11.1128 2526	12.0925 5438
21	2.0594 3147	2.1122 9910	71	11.5017 7414	12.5309 0948
22	2.1315 1158	2.1888 6995	72	11.9043 3624	12.9851 5494
23	2.2061 1448	2.2682 1648	73	12.3209 8801	13.4558 6681
24	2.2833 2849	2.3504 3933	74	12.7522 2259	13.9436 4198
25	2.3632 4498	2.4356 4275	75	13.1985 5038	14.4490 9901
26	2.4459 5856	2.5239 3480	76	13.6604 9964	14.9728 7884
27	2.5315 6711	2.6154 2744	77	14.1386 1713	15.5156 4570
28	2.6201 7196	2.7102 3669	78	14.6334 6873	16.0780 8786
29	2.7118 7798	2.8084 8277	79	15.1456 4013	16.6609 1854
30	2.8067 9370	2.9102 9027	80	15.6757 3754	17.2648 7684
31	2.9050 3148	3.0157 8829	81	16.2243 8835	17.8907 2863
32	3.0067 0759	3.1251 1061	82	16.7922 4195	18.5392 6754
33	3.1119 4235	3.2383 9587	83	17.3799 7041	19.2113 1599
34	3.2208 6033	3.3557 8772	84	17.9882 6938	19.9077 2619
35	3.3335 9045	3.4774 3503	85	18.6178 5881	20.6293 8127
36	3.4502 6611	3.6034 9205	86	19.2694 8386	21.3771 9634
37	3.5710 2543	3.7341 1864	87	19.9439 1580	22.1521 1971
38	3.6960 1132	3.8694 8044	88	20.6419 5285	22.9551 3404
39	3.8253 7171	4.0097 4910	89	21.3644 2120	23.7872 5765
40	3.9592 5972	4.1551 0251	90	22.1121 7595	24.6495 4574
41	4.0978 3381	4.3057 2497	91	22.8861 0210	25.5430 9178
42	4.2412 5799	4.4618 0750	92	23.6871 1568	26.4690 2885
43	4.3897 0202	4.6235 4802	93	24.5161 6473	27.4285 3115
44	4.5433 4160	4.7911 5164	94	25.3742 3049	28.4228 1540
45	4.7023 5855	4.9648 3089	95	26.2623 2856	29.4531 4246
46	4.8669 4110	5.1448 0601	96	27.1815 1006	30.5208 1888
47	5.0372 8404	5.3313 0523	97	28.1328 6291	31.6271 9856
48	5.2135 8898	5.5245 6504	98	29.1175 1311	32.7736 8451
49	5.3960 6459	5.7248 3052	99	30.1366 2607	33.9617 3057
50	5.5849 2686	5.9323 5563	100	31.1914 0798	35.1928 4331

Annos	3 3/4 %	3 7/8 %	Annos	3 3/4 %	3 7/8 %
1	1.0375 0000	1.0387 5000	51	6.5372 2412	6.9512 4949
2	1.0764 0625	1.0790 0156	52	6.7823 7003	7.2206 1041
3	1.1167 7148	1.1208 1287	53	7.0367 0890	7.5004 0906
4	1.1586 5042	1.1642 4437	54	7.3005 8549	7.7910 4992
5	1.2020 9981	1.2093 5884	55	7.5743 5744	8.0929 5310
6	1.2471 7855	1.2562 2150	56	7.8583 9585	8.4065 5503
7	1.2939 4774	1.3049 0008	57	8.1530 8569	8.7323 0904
8	1.3424 7078	1.3554 6496	58	8.4588 2640	9.0706 8601
9	1.3928 1344	1.4079 8922	59	8.7760 3239	9.4221 7510
10	1.4450 4394	1.4625 4881	60	9.1051 3361	9.7872 8438
11	1.4992 3309	1.5192 2257	61	9.4465 7612	10.1665 4165
12	1.5554 5433	1.5780 9245	62	9.8008 2272	10.5604 9514
13	1.6137 8387	1.6392 4353	63	10.1683 5358	10.9697 1433
14	1.6743 0076	1.7027 6422	64	10.5496 6684	11.3947 9076
15	1.7370 8704	1.7687 4633	65	10.9452 7934	11.8363 3890
16	1.8022 2781	1.8372 8525	66	11.3557 2732	12.2949 9703
17	1.8698 1135	1.9084 8005	67	11.7815 6709	12.7714 2817
18	1.9399 2927	1.9824 3366	68	12.2233 7586	13.2663 2101
19	2.0126 7662	2.0592 5296	69	12.6817 5245	13.7803 9095
20	2.0881 5200	2.1390 4901	70	13.1573 1817	14.3143 8110
21	2.1664 5770	2.2219 3716	71	13.6507 1760	14.8690 6337
22	2.2476 9986	2.3080 3723	72	14.1626 1951	15.4452 3957
23	2.3319 8860	2.3974 7367	73	14.6937 1774	16.0437 4260
24	2.4194 3818	2.4903 7577	74	15.2447 3216	16.6654 3763
25	2.5101 6711	2.5868 7784	75	15.8164 0961	17.3112 2334
26	2.6042 9838	2.6871 1935	76	16.4095 2497	17.9820 3324
27	2.7019 5956	2.7912 4523	77	17.0248 8216	18.6788 3703
28	2.8032 8305	2.8994 0598	78	17.6633 1524	19.4026 4197
29	2.9084 0616	3.0117 5796	79	18.3256 8956	20.1544 9434
30	3.0174 7139	3.1284 6358	80	19.0129 0292	20.9354 8100
31	3.1306 2657	3.2496 9155	81	19.7258 8678	21.7467 3089
32	3.2480 2507	3.3756 1709	82	20.4656 0754	22.5894 1671
33	3.3698 2601	3.5064 2226	83	21.2330 6782	23.4647 5661
34	3.4961 9448	3.6422 9612	84	22.0293 0786	24.3740 1592
35	3.6273 0178	3.7834 3509	85	22.8554 0691	25.3185 0904
36	3.7633 2559	3.9300 4320	86	23.7124 8466	26.2996 0127
37	3.9044 5030	4.0823 3238	87	24.6017 0284	27.3187 1082
38	4.0508 6719	4.2405 2276	88	25.5242 6670	28.3773 1086
39	4.2027 7471	4.4048 4301	89	26.4814 2670	29.4769 3166
40	4.3603 7876	4.5755 3068	90	27.4744 8020	30.6191 6276
41	4.5238 9296	4.7528 3249	91	28.5047 7321	31.8056 5531
42	4.6935 3895	4.9370 0475	92	29.5737 0220	33.0381 2446
43	4.8695 4666	5.1283 1369	93	30.6827 1603	34.3183 5178
44	5.0521 5466	5.3270 3584	94	31.8333 1789	35.6481 8791
45	5.2416 1046	5.5334 5848	95	33.0270 6731	37.0295 5519
46	5.4381 7085	5.7478 8000	96	34.2655 8233	38.4644 5046
47	5.6421 0226	5.9706 1035	97	35.5505 4167	39.9549 4791
48	5.8536 8109	6.2019 7150	98	36.8836 8698	41.5032 0214
49	6.0731 9413	6.4422 9789	99	38.2668 2524	43.1114 5123
50	6.3009 3891	6.6919 3694	100	39.7018 3119	44.7820 1996

Annos	4 %	4 1/8 %	Annos	4 %	4 1/8 %
1	1.0400 0000	1.0412 5000	51	7.3909 5068	7.8578 8620
2	1.0816 0000	1.0842 0156	52	7.6865 8871	8.1820 2401
3	1.1248 6400	1.1289 2488	53	7 9940 5226	8.5195 3250
4	1.1698 5856	1.1754 9303	54	8.3138 1435	8.8709 6322
5	1.2166 5290	1.2239 8212	55	8.6463 6692	9.2368 9045
6	1.2653 1902	1 2744 7138	56	8.9922 2160	9.6179 1218
7	1.3159 3178	1.3270 4332	57	9.3519 1046	10.0146 5106
8	1.3685 6905	1.3817 8386	58	9.7259 8688	10.4277 5541
9	1.4233 1181	1.4387 8244	59	10.1150 2635	10.8579 0032
10	1.4802 4428	1.4981 3222	60	10.5196 2741	11.3057 8871
11	1.5394 5406	1.5599 3017	61	10.9404 1250	11.7721 5250
12	1.6010 3222	1.6242 7729	62	11.3780 2900	12.2577 5379
13	1.6650 7351	1.6912 7873	63	11.8331 5016	12.7633 8613
14	1.7316 7645	1.7610 4398	64	12.3064 7617	13.2898 7581
15	1.8009 4351	1.8336 8704	65	12.7987 3522	13.8380 8319
16	1.8729 8125	1.9093 2663	66	13.3106 8463	14.4089 0412
17	1.9479 0050	1.9880 8636	67	13.8431 1201	15.0032 7141
18	2.0258 1652	2.0700 9492	68	14.3968 3649	15.6221 5636
19	2.1068 4918	2.1554 8633	69	14.9727 0995	16.2665 7031
20	2.1911 2314	2.2444 0015	70	15.5716 1835	16.9375 6633
21	2.2787 6807	2.3369 8165	71	16.1944 8308	17.6362 4094
22	2.3699 1879	2.4333 8215	72	16.8422 6241	18.3637 3588
23	2.4647 1555	2.5337 5916	73	17.5159 5290	19.1212 3999
24	2.5633 0417	2.6382 7672	74	18.2165 9102	19.9099 9114
25	2.6658 3633	2.7471 0564	75	18.9452 5466	20.7312 7827
26	2.7724 6979	2.8604 2375	76	19.7030 6485	21.5864 4350
27	2.8833 6858	2.9784 1623	77	20.4911 8744	22.4768 8429
28	2.9987 0332	3.1012 7590	78	21.3108 3494	23.4040 5577
29	3.1186 5145	3.2292 0353	79	22.1632 6834	24.3694 7307
30	3.2433 9751	3.3624 0817	80	23.0497 9907	25.3747 1384
31	3.3731 3341	3.5011 0751	81	23.9717 9103	26.4214 2078
32	3.5080 5875	3.6455 2819	82	24.9306 6267	27.5113 0439
33	3.6483 8110	3.7959 0623	83	25.9278 8918	28.6461 4570
34	3.7943 1634	3.9524 8736	84	26.9650 0475	29.8277 9921
35	3.9460 8899	4.1155 2747	85	28.0436 0494	31.0581 9592
36	4.1039 3255	4.2852 9298	86	29.1653 4914	32.3393 4650
37	4.2680 8986	4.4620 6131	87	30.3319 6311	33.6733 4455
38	4.4388 1345	4.6461 2134	88	31.5452 4163	35.0623 7001
39	4.6163 6599	4.8377 7384	89	32.8070 5129	36.5086 9277
40	4.8010 2063	5.0373 3202	90	34.1193 3334	38.0146 7635
41	4.9930 6145	5.2451 2196	91	35.4841 0668	39.5827 8175
42	5.1927 8391	5.4614 8324	92	36.9034 7094	41.2155 7150
43	5.4004 9527	5.6867 6943	93	38.3796 0978	42.9157 1382
44	5.6165 1508	5.9213 4866	94	39.9147 9417	44.6859 8702
45	5.8411 7568	6.1656 0430	95	41.5113 8594	46.5292 8398
46	6.0748 2271	6.4199 3547	96	43.1718 4138	48.4486 1694
47	6.3178 1562	6.6847 5781	97	44.8987 1503	50.4471 2239
48	6.5705 2824	6.9605 0407	98	46.6946 6363	52.5280 6619
49	6.8333 4937	7.2476 2487	99	48.5624 5018	54.6948 4892
50	7.1066 8335	7.5465 8939	100	50.5049 4818	56.9510 1144

Annos	4 1/4 %	4 3/8 %	Annos	4 1/4 %	4 3/8 %
1	1.0425 0000	1.0437 5000	51	8.3537 0714	8.8801 6250
2	1.0868 0625	1.0894 1406	52	8.7087 3969	9.2686 6961
3	1.1329 9552	1.1370 7593	53	9.0788 6113	9.6741 7390
4	1.1811 4783	1.1868 2300	54	9.4647 1273	10.0974 1901
5	1.2313 4661	1.2387 4651	55	9.8669 6302	10.5391 8109
6	1.2836 7884	1.2929 4167	56	10.2863 0895	11.0002 7027
7	1.3382 3519	1.3495 0786	57	10.7234 7708	11.4815 3209
8	1.3951 1018	1.4085 4883	58	11.1792 2485	11.9838 4912
9	1.4544 0237	1.4701 7284	59	11.6543 4191	12.5081 4252
10	1.5162 1447	1.5344 9291	60	12.1496 5144	13.0553 7375
11	1.5806 5358	1.6016 2697	61	12.6660 1163	13.6265 4636
12	1.6478 3136	1.6716 9815	62	13.2043 1712	14.2227 0776
13	1.7178 6419	1.7448 3494	63	13.7655 0060	14.8449 5122
14	1.7908 7342	1.8211 7147	64	14.3505 3438	15.4944 1784
15	1.8669 8554	1.9008 4773	65	14.9604 3209	16.1722 9862
16	1.9463 3243	1.9840 0981	66	15.5962 5045	16.8798 3669
17	2.0290 5156	2.0708 1024	67	16.2590 9109	17.6183 2954
18	2.1152 8625	2.1614 0819	68	16.9501 0247	18.3891 3146
19	2.2051 8591	2.2559 6980	69	17.6704 8182	19.1936 5596
20	2.2989 0631	2.3546 6848	70	18.4214 7730	20.0333 7841
21	2.3966 0983	2.4576 8522	71	19.2043 9008	20.9098 3871
22	2.4984 6575	2.5652 0895	72	20.0205 7666	21.8246 4416
23	2.6046 5054	2.6774 3684	73	20.8714 5117	22.7794 7234
24	2.7153 4819	2.7945 7471	74	21.7584 8784	23.7760 7425
25	2.8307 5049	2.9168 3735	75	22.6832 2358	24.8162 7750
26	2.9510 5739	3.0444 4898	76	23.6472 6058	25.9019 8964
27	3.0764 7732	3.1776 4363	77	24.6522 6915	27.0352 0169
28	3.2072 2761	3.3166 6553	78	25.6999 9059	28.2179 9176
29	3.3435 3478	3.4617 6965	79	26.7922 4019	29.4525 2890
30	3.4856 3501	3.6132 2207	80	27.9309 1040	30.7410 7704
31	3.6337 7450	3.7713 0054	81	29.1179 7409	32.0859 9916
32	3.7882 0992	3.9362 9494	82	30.3554 8799	33.4897 6163
33	3.9492 0884	4.1085 0784	83	31.6455 9623	34.9549 3870
34	4.1170 5021	4.2882 5506	84	32.9905 3407	36.4842 1726
35	4.2920 2485	4.4758 6622	85	34.3926 3177	38.0804 0177
36	4.4744 3590	4.6716 8537	86	35.8543 1862	39.7464 1935
37	4.6645 9943	4.8760 7160	87	37.3781 2716	41.4853 2519
38	4.8628 4491	5.0893 9973	88	38.9666 9757	43.3003 0817
39	5.0695 1581	5.3120 6097	89	40.6227 8221	45.1946 9665
40	5.2849 7024	5.5444 6364	90	42.3492 5046	47.1719 6463
41	5.5095 8147	5.7870 3392	91	44.1490 9360	49.2357 3808
42	5.7437 3868	6.0402 1666	92	46.0254 3008	51.3898 0163
43	5.9878 4758	6.3044 7614	93	47.9815 1086	53.6381 0545
44	6.2423 3110	6.5802 9697	94	50.0207 2507	55.9847 7256
45	6.5076 3017	6.8681 8496	95	52.1466 0588	58.4341 0636
46	6.7842 0445	7.1686 6805	96	54.3628 3664	60.9905 9851
47	7.0725 3314	7.4822 9728	97	56.6732 5719	63.6589 3720
48	7.3731 1580	7.8096 4778	98	59.0818 7062	66.4440 1570
49	7.6864 7322	8.1513 1987	99	61.5928 5012	69.3509 4139
50	8.0131 4834	8.5079 4012	100	64.2105 4625	72.3850 4507

Annos	4 1/2 %	4 5/8 %	Annos	4 1/2 %	4 5/8 %
1	1.0450 0000	1.0462 5000	51	9.4391 0490	10.0324 9660
2	1.0920 2500	1.0946 3906	52	9.8638 6463	10.4964 9956
3	1.1411 6612	1.1452 6612	53	10.3077 3853	10.9819 6267
4	1.1925 1860	1.1982 3468	54	10.7715 8677	11.4898 7844
5	1.2461 8194	1.2536 5303	55	11.2563 0817	12.0212 8532
6	1.3022 6012	1.3116 3448	56	11.7628 4204	12.5772 6977
7	1.3608 6183	1.3722 9758	57	12.2921 6993	13.1589 6849
8	1.4221 0061	1.4357 6634	58	12.8453 1758	13.7675 7079
9	1.4860 9514	1.5021 7053	59	13.4233 5687	14.4043 2093
10	1.5529 6942	1.5716 4592	60	14.0274 0793	15.0705 2078
11	1.6228 5305	1.6443 3455	61	14.6586 4129	15.7675 3236
12	1.6958 8143	1.7203 8502	62	15.3182 8014	16.4967 8074
13	1.7721 9610	1.7999 5283	63	16.0076 0275	17.2597 5684
14	1.8519 4492	1.8832 0064	64	16.7279 4487	18.0580 2060
15	1.9352 8244	1.9702 9867	65	17.4807 0239	18.8932 0405
16	2.0223 7015	2.0614 2499	66	18.2673 3400	19.7670 1474
17	2.1133 7681	2.1567 6589	67	19.0893 6403	20.6812 3917
18	2.2084 7877	2.2565 1632	68	19.9483 8541	21.6377 4648
19	2.3078 6031	2.3608 8020	69	20.8460 6276	22.6384 9226
20	2.4117 1402	2.4700 7090	70	21.7841 3558	23.6855 2252
21	2.5202 4116	2.5843 1168	71	22.7644 2168	24.7809 7794
22	2.6336 5201	2.7038 3610	72	23.7888 2066	25.9270 9817
23	2.7521 6635	2.8288 8852	73	24.8593 1759	27.1262 2646
24	2.8760 1383	2.9597 2461	74	25.9779 8688	28.3808 1443
25	3 0054 3446	3.0966 1188	75	27 1469 0629	29.6934 2710
26	3.1406 7901	3.2398 3018	76	28.3686 1112	31.0667 4811
27	3.2820 0956	3.3896 7232	77	29.6451 9862	32.5035 8521
28	3.4296 9999	3.5464 4467	78	30.9792 3256	34.0068 7602
29	3.5840 3649	3.7104 6773	79	32.3732 9802	35.5796 9404
30	3.7453 1813	3.8820 7686	80	33.8300 9643	37.2252 5489
31	3.9138 5745	4.0616 2292	81	35.3524 5077	38.9469 2292
32	4.0899 8104	4.2494 7298	82	36.9433 1106	40.7482 1811
33	4.2740 3018	4.4460 1110	83	38.6057 6006	42.6328 2320
34	4.4663 6154	4.6516 3912	84	40.3430 1926	44.6045 9127
35	4.6673 4781	4.8667 7743	85	42.1584 5513	46.6675 5362
36	4.8773 7846	5.0918 6588	86	44.0555 8561	48.8259 2797
37	5.0968 6049	5.3273 6468	87	46.0380 8696	51.0841 2714
38	5.3262 1921	5.5737 5530	88	48.1098 0087	53.4467 6802
39	5.5658 9908	5.8315 4148	89	50.2747 4191	55.9186 8104
40	5.8163 6454	6.1012 5027	90	52.5371 0530	58.5049 2004
41	6.0781 0094	6.3834 3310	91	54.9012 7503	61.2107 7259
42	6.3516 1548	6.6786 6688	92	57.3718 3241	64.0417 7082
43	6.6374 3818	6.9875 5522	93	59.9535 6487	67.0037 0272
44	6.9361 2290	7.3107 2965	94	62.6514 7529	70.1026 2398
45	7.2482 4843	7.6488 5090	95	65.4707 9168	73.3448 7033
46	7.5744 1961	8.0026 1025	96	68.4169 7730	76.7370 7059
47	7.9152 6849	8.3727 3097	97	71.4957 4128	80.2861 6010
48	8.2714 5557	8.7599 6978	98	74.7130 4964	83.9993 9501
49	8.6436 7107	9.1651 1838	99	78.0751 3687	87.8843 6703
50	9.0326 3627	9.5890 0511	100	81.5885 1803	91.9490 1900

Annos	4 3/4 %	4 7/8 %	Annos	4 3/4 %	4 7/8 %
1	1.0475 0000	1.0487 5000	51	10.6624 1577	11.3310 6330
2	1.0972 5625	1.0998 7656	52	11.1688 8052	11.8834 5264
3	1.1493 7592	1.1534 9554	53	11.6994 0235	12.4627 7095
4	1.2039 7128	1.2097 2845	54	12.2551 2396	13.0703 3103
5	1.2611 5991	1.2687 0271	55	12.8372 4235	13.7075 0967
6	1.3210 6501	1.3305 5197	56	13.4470 1136	14.3757 5077
7	1.3838 1560	1.3954 1638	57	14.0857 4440	15.0765 6862
8	1.4495 4684	1.4634 4293	58	14.7548 1726	15.8115 5134
9	1.5184 0031	1.5347 8577	59	15.4556 7108	16.5823 6447
10	1.5905 2433	1.6096 0658	60	16.1898 1545	17.3907 5474
11	1.6660 7423	1.6880 7490	61	16.9588 3169	18.2385 5403
12	1.7452 1276	1.7703 6855	62	17.7643 7619	19.1276 8354
13	1.8281 1037	1.8566 7402	63	18.6081 8406	20.0601 5811
14	1.9149 4561	1.9471 8688	64	19.4920 7281	21.0380 9082
15	2.0059 0552	2.0421 1224	65	20.4179 4626	22.0636 9775
16	2.1011 8604	2.1416 6521	66	21.3877 9871	23.1393 0301
17	2.2009 9237	2.2460 7139	67	22.4037 1915	24.2673 4403
18	2.3055 3951	2.3555 6737	68	23.4678 9581	25.4503 7705
19	2.4150 5264	2.4704 0128	69	24.5826 2086	26.6910 8293
20	2.5297 6764	2.5908 3334	70	25.7502 9535	27.9922 7323
21	2.6499 3160	2.7171 3646	71	26.9734 3438	29.3568 9655
22	2.7758 0335	2.8495 9687	72	28.2546 7251	30.7880 4525
23	2.9076 5401	2.9885 1471	73	29.5967 6946	32.2889 6246
24	3.0457 6758	3.1342 0480	74	31.0026 1601	33.8630 4938
25	3.1904 4154	3.2869 9729	75	32.4752 4027	35.5138 7304
26	3.3419 8751	3.4472 3841	76	34.0178 1418	37.2451 7435
27	3.5007 3192	3.6152 9128	77	35.6336 6035	39.0608 7660
28	3.6670 1668	3.7915 3673	78	37.3262 5922	40.9650 9433
29	3.8411 9998	3.9763 7414	79	39.0992 5653	42.9621 4268
30	4.0236 5698	4.1702 2238	80	40.9564 7122	45.0565 4714
31	4.2147 8068	4.3735 2073	81	42.9019 0360	47.2530 5381
32	4.4149 8276	4.5867 2986	82	44.9397 4402	49.5566 4018
33	4.6246 9445	4.8103 3294	83	47.0743 8186	51.9725 2639
34	4.8443 6743	5.0448 3667	84	49.3104 1500	54.5061 8705
35	5.0744 7488	5.2907 7246	85	51.6526 5971	57.1633 6367
36	5.3155 1244	5.5486 9762	86	54.1061 6105	59.9500 7765
37	5.5679 9928	5.8191 9663	87	56.6762 0370	62.8726 4394
38	5.8324 7925	6.1028 8246	88	59.3683 2338	65.9376 8533
39	6.1095 2201	6.4003 9798	89	62.1883 1874	69.1521 4749
40	6.3997 2431	6.7124 1738	90	65.1422 6388	72.5233 1468
41	6.7037 1121	7.0396 4773	91	68.2365 2141	76.0588 2627
42	7.0221 3750	7.3828 3056	92	71.4777 5618	79.7666 9405
43	7.3556 8903	7.7427 4355	93	74.8729 4960	83.6553 2038
44	7.7050 8426	8.1202 0230	94	78.4294 1470	87.7335 1725
45	8.0710 7576	8.5160 6216	95	82.1548 1190	92.0105 2622
46	8.4544 5186	8.9312 2019	96	86.0571 6547	96.4960 3937
47	8.8560 3832	9.3666 1717	97	90.1448 8083	101.2002 2129
48	9.2767 0014	9.8232 3976	98	94.4267 6267	106.1337 3208
49	9.7173 4340	10.3021 2270	99	98.9120 3389	111.3077 5152
50	10.1789 1721	10.8043 5118	100	103.6103 5550	116.7340 0441

Annos	5 %	5 1/4 %	Annos	5 %	5 1/4 %
1	1.0500 0000	1.0525 0000	51	12.0407 6977	13.5933 7600
2	1.1025 0000	1.1077 5625	52	12.6428 0826	14.3070 2824
3	1.1576 2500	1.1659 1345	53	13.2749 4868	15.0581 4722
4	1.2155 0625	1.2271 2391	54	13.9386 9611	15.8486 9995
5	1.2762 8156	1.2915 4791	55	14.6356 3092	16.6807 5670
6	1.3400 9564	1.3593 5418	56	15.3674 1246	17.5564 9643
7	1.4071 0042	1.4307 2027	57	16.1357 8308	18.4782 1249
8	1.4774 5544	1.5058 3309	58	16.9425 7224	19.4483 1864
9	1.5513 2822	1.5848 8933	59	17.7897 0085	20.4693 5537
10	1.6288 9463	1.6680 9602	60	18.6791 8589	21.5439 9653
11	1.7103 3936	1.7556 7106	61	19.6131 4519	22.6750 5635
12	1.7958 5633	1.8478 4379	62	20.5938 0245	23.8654 9681
13	1.8856 4914	1.9448 5559	63	21.6234 9257	25.1184 3539
14	1.9799 3160	2.0469 6050	64	22.7046 6720	26.4371 5325
15	2.0789 2818	2.1544 2593	65	23.8399 0056	27.8251 0379
16	2.1828 7459	2.2675 3329	66	25.0318 9559	29.2859 2174
17	2.2920 1832	2.3865 7879	67	26.2834 9036	30.8234 3263
18	2.4066 1923	2.5118 7418	68	27.5976 6488	32.4416 6285
19	2.5269 5020	2.6437 4757	69	28.9775 4813	34.1448 5015
20	2.6532 9771	2.7825 4432	70	30.4264 2553	35.9374 5478
21	2.7859 6259	2.9286 2789	71	31.9477 4681	37.8241 7115
22	2.9252 6072	3.0823 8086	72	33.5451 3415	39.8099 4014
23	3.0715 2376	3.2442 0585	73	35.2223 9086	41.8999 6200
24	3.2250 9994	3.4145 2666	74	36.9835 1040	44.0997 1000
25	3.3863 5494	3.5937 8931	75	38.8326 8592	46.4149 4478
26	3.5556 7269	3.7824 6325	76	40.7743 2022	48.8517 2938
27	3.7334 5632	3.9810 4257	77	42.8130 3623	51.4164 4517
28	3.9201 2914	4.1900 4731	78	44.9536 8804	54.1158 0854
29	4.1161 3560	4.4100 2479	79	47.2013 7244	56.9568 8849
30	4.3219 4238	4.6415 5109	80	49.5614 4106	59.9471 2514
31	4.5380 3949	4.8852 3252	81	52.0395 1312	63.0943 4921
32	4.7649 4147	5.1417 0723	82	54.6414 8877	66.4068 0254
33	5.0031 8854	5.4116 4686	83	57.3735 6321	69.8931 5967
34	5.2533 4797	5.6957 5832	84	60.2422 4137	73.5625 5055
35	5.5160 1537	5.9947 8563	85	63.2543 5344	77.4245 8446
36	5.7918 1614	6.3095 1188	86	66.4170 7111	81.4893 7514
37	6.0814 0694	6.6407 6125	87	69.7379 2467	85.7675 6734
38	6.3854 7729	6.9894 0122	88	73.2248 2090	90.2703 6462
39	6.7047 5115	7.3563 4478	89	76.8860 6195	95.0095 5877
40	7.0399 8871	7.7425 5288	90	80.7303 6504	99.9975 6060
41	7.3919 8815	8.1490 3691	91	84.7668 8329	105.2474 3253
42	7.7615 8755	8.5768 6135	92	89.0052 2746	110.7729 2274
43	8.1496 6693	9.0271 4657	93	93.4554 8883	116 5885 0118
44	8.5571 5028	9.5010 7176	94	98.1282 6327	122.7093 9750
45	8.9850 0779	9.9998 7803	95	103.0346 7644	129.1516 4086
46	9.4342 5818	10.5248 7163	96	108.1864 1026	135.9321 0201
47	9.9059 7109	11.0774 2739	97	113.5957 3077	143.0685 3737
48	10.4012 6965	11.6589 9232	98	119.2755 1731	150.5796 3558
49	10.9213 3313	12.2710 8942	99	125.2392 9318	158.4850 6644
50	11.4673 9978	12.9153 2162	100	131.5012 5784	166.8055 3243

Annos	5 1/2 %	5 3/4 %	Annos	5 1/2 %	5 3/4 %
1	1.0550 0000	1.0575 0000	51	15.3417 6907	17.3100 8412
2	1.1130 2500	1.1183 0625	52	16.1855 6637	18.3054 1396
3	1.1742 4137	1.1826 0886	53	17.0757 7252	19.3579 7526
4	1.2388 2465	1.2506 0887	54	18.0149 4001	20.4710 5884
5	1.3069 6001	1.3225 1888	55	19.0057 6171	21.6481 4472
6	1.3788 4281	1.3985 6371	56	20.0510 7860	22.8929 1304
7	1.4546 7916	1.4789 8113	57	21.1538 8793	24.2092 5554
8	1.5346 8651	1.5640 2254	58	22.3173 5176	25.6012 8774
9	1.6190 9427	1.6539 5384	59	23.5448 0611	27.0733 6178
10	1.7081 4446	1.7490 5618	60	24.8397 7045	28.6300 8008
11	1.8020 9240	1.8496 2692	61	26.2059 5782	30.2763 0969
12	1.9012 0749	1.9559 8046	62	27.6472 8550	32.0171 9750
13	2.0057 7390	2.0684 4934	63	29.1678 8620	33.8581 8635
14	2.1160 9146	2.1873 8518	64	30.7721 1994	35.8050 3207
15	2.2324 7649	2.3131 5982	65	32.4645 8654	37.8638 2141
16	2.3552 6270	2.4461 6651	66	34.2501 3880	40.0409 9114
17	2.4848 0215	2.5868 2109	67	36.1338 9643	42.3433 4813
18	2.6214 6627	2.7355 6330	68	38.1212 6074	44.7780 9065
19	2.7656 4691	2.8928 5819	69	40.2179 3008	47.3528 3086
20	2.9177 5749	3.0591 9754	70	42.4299 1623	50.0756 1864
21	3.0782 3415	3.2351 0140	71	44.7635 6163	52.9549 6671
22	3.2475 3703	3.4211 1973	72	47.2255 5751	55.9998 7729
23	3.4261 5157	3.6178 3411	73	49.8229 6318	59.2198 7024
24	3.6145 8990	3.8258 5957	74	52.5632 2615	62.6250 1278
25	3.8133 9235	4.0458 4650	75	55.4542 0359	66.2259 5101
26	4.0231 2893	4.2784 8267	76	58.5041 8479	70.0339 4320
27	4.2444 0102	4.5244 9542	77	61.7219 1495	74.0608 9493
28	4.4778 4307	4.7846 5391	78	65.1166 2027	78.3193 9639
29	4.7241 2444	5.0597 7151	79	68.6980 3439	82.8227 6168
30	4.9839 5129	5.3507 0837	80	72.4764 2628	87.5850 7048
31	5.2580 6861	5.6583 7410	81	76.4626 2973	92.6212 1203
32	5.5472 6238	5.9837 3061	82	80.6680 7436	97.9469 3172
33	5.8523 6181	6.3277 9512	83	85.1048 1845	103.5788 8029
34	6.1742 4171	6.6916 4334	84	89.7855 8347	109 5346 6591
35	6.5138 2501	7.0764 1284	85	94.7237 9056	115.8329 0920
36	6.8720 8538	7.4833 0657	86	99.9335 9904	122.4933 0148
37	7.2500 5008	7.9135 9670	87	105.4299 4698	129.5366 6632
38	7.6488 0283	8.3686 2851	88	111.2285 9407	136.9850 2463
39	8.0694 8699	8.8498 2465	89	117.3461 6674	144.8616 6354
40	8.5133 0877	9.3586 8957	90	123.8002 0591	153.1912 0920
41	8.9815 4076	9.8968 1422	91	130.6092 1724	161.9997 0373
42	9.4755 2550	10.4658 8104	92	137.7927 2419	171.3146 8669
43	9.9966 7940	11.0676 6920	93	145.3713 2402	181.1652 8118
44	10.5464 9677	11.7040 6018	94	153.3667 4684	191.5822 8484
45	11.1265 5409	12.3770 4364	95	161.8019 1791	202.5982 6622
46	11.7385 1456	13.0887 2365	96	170.7010 2340	214.2476 6653
47	12.3841 3287	13.8413 2526	97	180.0895 7969	226.5669 0736
48	13.0652 6017	14.6372 0146	98	189.9945 0657	239.5945 0453
49	13.7838 4948	15.4788 4054	99	200.4442 0443	253.3711 8854
50	14.5419 6120	16.3688 7387	100	211.4686 3567	267.9400 3188

Annos	6 %	6 1/4 %	Annos	6 %	6 1/4 %
1	1.0600 0000	1.0625 0000	51	19.5253 6353	22.0178 9898
2	1.1236 0000	1.1289 0625	52	20.6968 8534	23.3940 1767
3	1.1910 1600	1.1994 6289	53	21.9386 9846	24.8561 4377
4	1.2624 7696	1.2744 2932	54	23.2550 2037	26.4096 5276
5	1.3382 2558	1.3540 8115	55	24.6503 2159	28.0602 5606
6	1.4185 1911	1.4387 1123	56	26.1293 4089	29.8140 2206
7	1.5036 3026	1.5286 3068	57	27.6971 0134	31 6773 9844
8	1.5938 4807	1.6241 7009	58	29.3589 2742	33.6572 3584
9	1.6894 7896	1.7256 8073	59	31.1204 6307	35.7608 1308
10	1.7908 4770	1.8335 3577	60	32.9876 9985	37.9958 6390
11	1.8982 9856	1.9481 3176	61	34.9669 5230	40.3706 0539
12	2.0121 9647	2.0698 8999	62	37.0649 6944	42.8937 6823
13	2.1329 2826	2.1992 5812	63	39.2888 6761	45.5746 2874
14	2.2609 0396	2.3367 1175	64	41.6461 9967	48.4230 4304
15	2.3965 5819	2.4827 5623	65	44.1449 7165	51.4494 8323
16	2.5403 5168	2.6379 2850	66	46.7936 6994	54.6650 7593
17	2.6927 7279	2.8027 9903	67	49.6012 9014	58.0816 4318
18	2.8543 3915	2.9779 7397	68	52.5773 6755	61.7117 4587
19	3.0255 9950	3.1640 9734	69	55.7320 0960	65.5687 2999
20	3.2071 3547	3.3618 5342	70	59.0759 3018	69.6667 7562
21	3.3995 6360	3.5719 6926	71	62.6204 8599	74.0209 4909
22	3.6035 3742	3.7952 1734	72	66.3777 1515	78.6472 5841
23	3.8197 4966	4.0324 1843	73	70.3603 7806	83.5627 1206
24	4.0489 3464	4.2844 4458	74	74.5820 0074	88.7853 8156
25	4.2918 7072	4.5522 2236	75	79.0569 2079	94.3344 6791
26	4.5493 8296	4 8367 3626	76	83.8003 3603	100.2303 7216
27	4.8223 4594	5.1390 3228	77	88.8283 5619	106.4947 7042
28	5.1116 8670	5.4602 2180	78	94.1580 5757	113.1506 9357
29	5.4183 8790	5.8014 8566	79	99.8075 4102	120.2226 1191
30	5.7434 9117	6.1640 7851	80	105.7959 9348	127.7365 2516
31	6.0881 0064	6.5493 3342	81	112.1437 5309	135.7200 5798
32	6.4533 8668	6.9586 6676	82	118.8723 7828	144.2025 6161
33	6.8405 8988	7.3935 8343	83	126.0047 2097	153.2152 2171
34	7.2510 2528	7.8556 8239	84	133.5650 0423	162.7911 7306
35	7.6860 8679	8.3466 6254	85	141.5789 0448	172.9656 2138
36	8.1472 5200	8.8683 2895	86	150.0736 3875	183.7759 7272
37	8.6360 8712	9.4225 9951	87	159.0780 5708	195.2619 7101
38	9.1542 5235	10.0115 1198	88	168.6227 4050	207.4658 4420
39	9.7035 0749	10.6372 3148	89	178.7401 0493	220.4324 5946
40	10.2857 1794	11.3020 5845	90	189.4645 1123	234.2094 8818
41	10.9028 6101	12.0084 3710	91	200.8323 8190	248.8475 8119
42	11.5570 3267	12.7589 6442	92	212.8823 2482	264.4005 5501
43	12.2504 5463	13.5563 9970	93	225.6552 6431	280.9255 8970
44	12.9854 8191	14.4036 7468	94	239.1945 8017	298.4834 3906
45	13.7646 1083	15.3039 0434	95	253.5462 5498	317.1386 5400
46	14.5904 8748	16.2603 9837	96	268.7590 3027	336.9598 1987
47	15.4659 1673	17.2766 7326	97	284.8845 7209	358.0198 0861
48	16.3938 7173	18.3564 6534	98	301.9776 4642	380.3960 4665
49	17.3775 0403	19.5037 4443	99	320.0963 0520	404.1707 9957
50	18.4201 5427	20.7227 2845	100	339.3020 8351	429.4314 7454

Annos	6 1/2 %	6 3/4 %	Annos	6 1/2 %	6 3/4 %
1	1.0650 0000	1.0675 0000	51	24.8216 1279	27.9744 8297
2	1.1342 2500	1.1395 5625	52	26.4350 1762	29.8627 6057
3	1.2079 4962	1.2164 7630	53	28.1532 9377	31.8784 9691
4	1.2864 6635	1.2985 8845	54	29.9832 5786	34.0302 9545
5	1.3700 8666	1.3862 4317	55	31.9321 6963	36.3273 4039
6	1.4591 4230	1.4798 1458	56	34.0077 6065	38.7794 3587
7	1.5539 8655	1.5797 0207	57	36.2182 6509	41.3970 4779
8	1.6549 9567	1.6863 3195	58	38.5724 5233	44.1913 4852
9	1.7625 7039	1.8001 5936	59	41.0796 6173	47.1742 6454
10	1.8771 3747	1.9216 7012	60	43.7498 3974	50.3585 2740
11	1.9991 5140	2.0513 8285	61	46.5935 7932	53.7577 2800
12	2.1290 9624	2.1898 5119	62	49.6221 6198	57.3863 7464
13	2.2674 8750	2.3376 6615	63	52.8476 0251	61.2599 5492
14	2.4148 7418	2.4954 5861	64	56.2826 9667	65.3950 0188
15	2.5718 4101	2.6639 0207	65	59.9410 7195	69.8091 6451
16	2.7390 1067	2.8437 1546	66	63.8372 4163	74.5212 8311
17	2.9170 4637	3.0356 6625	67	67.9866 6234	79.5514 6972
18	3.1066 5438	3.2405 7373	68	72.4057 9539	84.9211 9393
19	3.3085 8691	3.4593 1245	69	77.1121 7209	90.6533 7452
20	3.5236 4506	3.6928 1604	70	82.1244 6327	96.7724 7730
21	3.7526 8199	3.9420 8113	71	87.4625 5339	103.3046 1952
22	3.9966 0632	4.2081 7160	72	93.1476 1936	110.2776 8134
23	4.2563 8573	4.4922 2319	73	99.2022 1461	117.7214 2483
24	4.5330 5081	4.7954 4825	74	105.6503 5856	125.6676 2100
25	4.8276 9911	5.1191 4101	75	112.5176 3187	134.1501 8542
26	5.1414 9955	5.4646 8303	76	119.8312 7794	143.2053 2293
27	5.4756 9702	5.8335 4913	77	127.6203 1101	152.8716 8223
28	5.8316 1733	6.2273 1370	78	135.9156 3122	163.1905 2078
29	6.2106 7245	6.6476 5737	79	144.7501 4725	174.2058 8094
30	6.6143 6616	7.0963 7424	80	154.1589 0683	185.9647 7790
31	7.0442 9996	7.5753 7950	81	164.1792 3577	198.5174 0041
32	7.5021 7946	8.0867 1762	82	174.8508 8609	211.9173 2494
33	7.9898 2113	8.6325 7106	83	186.2161 9369	226.2217 4437
34	8.5091 5950	9.2152 6961	84	198.3202 4628	241.4917 1211
35	9.0622 5487	9.8373 0031	85	211.2110 6229	257.7924 0268
36	9.6513 0143	10.5013 1808	86	224.9397 8134	275.1933 8986
37	10.2786 3603	11.2101 5705	87	239.5608 6712	293.7689 4368
38	10.9467 4737	11.9668 4265	88	255.1323 2349	313.5983 4738
39	11.6582 8595	12.7746 0453	89	271.7159 2451	334.7662 3582
40	12.4160 7453	13.6368 9033	90	289.3774 5961	357.3629 5674
41	13.2231 1938	14.5573 8043	91	308.1869 9448	381.4849 5632
42	14.0826 2214	15.5400 0361	92	328.2191 4912	407.2351 9087
43	14.9979 9258	16.5889 5385	93	349.5533 9382	434.7235 6626
44	15.9728 6209	17.7087 0824	94	372.2743 6441	464.0674 0698
45	17.0110 9813	18.9040 4604	95	396.4721 9810	495.3919 5695
46	18.1168 1951	20.1800 6915	96	422.2428 9098	528.8309 1405
47	19.2944 1278	21.5422 2382	97	449.6886 7889	564.5270 0074
48	20.5485 4961	22.9963 2392	98	478.9184 4302	602.6325 7329
49	21.8842 0533	24.5485 7579	99	510.0481 4181	643.3102 7199
50	23.3066 7868	26.2056 0466	100	543.2012 7103	686.7337 1535

Annos	7 %	7 1/4 %	Annos	7 %	7 1/4 %
1	1.0700 0000	1.0725 0000	51	31.5190 1682	35.5027 7856
2	1.1449 0000	1.1502 5625	52	33.7253 4799	38.0767 3001
3	1.2250 4300	1.2336 4983	53	36.0861 2235	40.8372 9294
4	1.3107 9601	1.3230 8944	54	38.6121 5092	43.7979 9667
5	1.4025 5173	1.4190 1343	55	41.3150 0148	46.9733 5143
6	1.5007 3035	1.5218 9190	56	44.2070 5159	50.3789 1941
7	1.6057 8148	1.6322 2906	57	47.3015 4520	54.0313 9107
8	1.7181 8618	1.7505 6567	58	50.6126 5336	57.9486 6692
9	1.8384 5921	1.8774 8168	59	54.1555 3910	62.1499 4527
10	1.9671 5136	2.0135 9910	60	57.9464 2683	66.6558 1630
11	2.1048 5195	2.1595 8504	61	62.0026 7671	71.4883 6299
12	2.2521 9159	2.3161 5495	62	66.3428 6408	76.6712 6030
13	2.4098 4500	2.4840 7618	63	70.9868 6457	82.2299 3633
14	2.5785 3415	2.6641 7171	64	75.9559 4509	88.1916 0671
15	2.7590 3154	2.8573 2416	65	81.2728 6124	94.5854 9820
16	2.9521 6375	3.0644 8016	66	86.9619 6153	101.4429 4682
17	3.1588 1521	3.2866 5497	67	93.0492 9884	108.7975 6046
18	3.3799 3228	3.5249 3745	68	99.5627 4976	116.6853 8360
19	3.6165 2753	3.7804 9542	69	106.5321 4224	125.1450 7391
20	3.8696 8446	4.0545 8134	70	113.9893 9220	134.2180 9176
21	4.1405 6237	4.3485 3849	71	121.9686 4965	143.9489 0342
22	4.4304 0174	4.6638 0753	72	130.5064 5513	154.3851 9891
23	4.7405 2986	5.0019 3357	73	139.6419 0699	165.5781 2584
24	5.0723 6695	5.3645 7375	74	149.4168 4047	177.5825 3996
25	5.4274 3264	5.7535 0535	75	159.8760 1931	190.4572 7411
26	5.8073 5292	6.1706 3449	76	171.0673 4066	204.2654 2648
27	6.2138 6763	6.6180 0549	77	183.0420 5450	219.0746 6990
28	6.6488 3836	7.0978 1089	78	195.8549 9832	234.9575 8347
29	7.1142 5705	7.6124 0218	79	209.5648 4820	251.9920 0827
30	7.6122 5504	8.1643 0134	80	224.2343 8758	270.2614 2887
31	8.1451 1290	8.7562 1318	81	239.9307 9471	289.8553 8246
32	8.7152 7080	9.3910 3864	82	256.7259 5034	310.8698 9769
33	9.3253 3975	10.0718 8894	83	274.6967 6686	333.4079 6527
34	9.9781 1354	10.8021 0089	84	293.9255 4054	357.5800 4275
35	10.6765 8148	11.5852 5320	85	314.5003 2838	383.5045 9585
36	11.4239 4219	12.4251 8406	86	336.5153 5136	411.3086 7905
37	12.2236 1814	13.3260 0990	87	360.0714 2596	441.1285 5828
38	13.0792 7141	14.2921 4562	88	385.2764 2578	473.1103 7876
39	13.9948 2041	15.3283 2618	89	412.2457 7558	507.4108 8122
40	14.9744 5784	16.4396 2983	90	441.1029 7987	544.1981 7011
41	16.0226 6989	17.6315 0299	91	471.9801 8846	583.6525 3744
42	17.1442 5678	18.9097 8696	92	505.0188 0166	625.9673 4640
43	18.3443 5475	20.2807 4651	93	540.3701 1777	671.3499 7902
44	19.6284 5959	21.7511 0063	94	578.1960 2602	720.0228 5250
45	21.0024 5176	23.3280 5543	95	618.6697 4784	772.2245 0930
46	22.4726 2338	25.0193 3945	96	661.9766 3019	828.2107 8623
47	24.0457 0702	26.8332 4156	97	708.3149 9430	888.2560 6823
48	25.7289 0651	28.7786 5157	98	757.8970 4390	952.6546 3317
49	27.5299 2997	30.8651 0381	99	810.9498 3697	1021.7220 9408
50	29.4570 2506	33.1028 2384	100	867.7163 2556	1095.7969 4590

Annos	7 1/2 %	7 3/4 %	Annos	7 1/2 %	7 3/4 %
1	1.0750 0000	1.0775 0000	51	39.9789 7698	45.0071 1970
2	1.1556 2500	1.1610 0625	52	42.9774 0026	48.4951 7148
3	1.2422 9688	1.2509 8423	53	46.2007 0528	52.2535 4726
4	1.3354 6914	1.3479 3551	54	49.6657 5817	56.3031 9718
5	1.4356 2933	1.4524 0051	55	53.3906 9004	60.6666 9496
6	1.5433 0153	1.5649 6155	56	57.3949 9179	65.3683 6382
7	1.6590 4914	1.6862 4608	57	61.6996 1617	70.4344 1201
8	1.7834 7783	1.8169 3015	58	66.3270 8739	75.8930 7895
9	1.9172 3866	1.9577 4223	59	71.3016 1894	81.7747 9256
10	2.0610 3156	2.1094 6726	60	76.6492 4036	88.1123 3899
11	2.2156 0893	2.2729 5097	61	82.3979 3339	94.9410 4526
12	2.3817 7960	2.4491 0467	62	88.5777 7839	102.2989 7627
13	2.5604 1307	2.6389 1028	63	95.2211 1177	110.2271 4693
14	2.7524 4405	2.8434 2583	64	102.3626 9515	118.7697 5081
15	2.9588 7735	3.0637 9133	65	110.0398 9729	127.9744 0650
16	3.1807 9315	3.3012 3516	66	118.2928 8959	137.8924 2301
17	3.4193 5264	3.5570 8088	67	127.1648 5631	148.5790 8579
18	3.6758 0409	3.8327 5465	68	136.7022 2053	160.0939 6494
19	3.9514 8940	4.1297 9313	69	146.9548 8707	172.5012 4722
20	4.2478 5110	4.4498 5210	70	157.9765 0360	185.8700 9388
21	4.5664 3993	4.7947 1564	71	169.8247 4137	200.2750 2616
22	4.9089 2293	5.1663 0610	72	182.5615 9697	215.7963 4068
23	5.2770 9215	5.5666 9482	73	196.2537 1675	232.5205 5709
24	5.6728 7406	5.9981 1367	74	210.9727 4550	250.5409 0026
25	6.0983 3961	6.4629 6748	75	226.7957 0141	269.9578 2003
26	6.5557 1508	6.9638 4746	76	243.8053 7902	290.8795 5108
27	7.0473 9371	7.5035 4564	77	262.0907 8245	313.4227 1629
28	7.5759 4824	8.0850 7043	78	281.7475 9113	337.7129 7680
29	8.1441 4436	8.7116 6339	79	302.8786 6046	363.8857 3251
30	8.7549 5519	9.3868 1730	80	325.5945 6000	392.0868 7677
31	9.4115 7683	10.1142 9564	81	350.0141 5200	422.4736 0972
32	10.1174 4509	10.8981 5355	82	376.2652 1340	455.2153 1448
33	10.8762 5347	11.7427 6045	83	404.4851 0440	490.4945 0135
34	11.6919 7248	12.6528 2439	84	434.8214 8723	528.5078 2521
35	12.5688 7042	13.6334 1828	85	467.4330 9878	569.4671 8166
36	13.5115 3570	14.6900 0819	86	502.4905 8119	613.6008 8824
37	14.5249 0088	15.8284 8383	87	540.1773 7477	661.1549 5708
38	15.6142 6844	17.0551 9132	88	580.6906 7788	712.3944 6625
39	16.7853 3858	18.3769 6865	89	624.2424 7872	767.6050 3738
40	18.0442 3897	19.8011 8372	90	671.0606 6463	827.0944 2778
41	19.3975 5689	21.3357 7546	91	721.3902 1447	891.1942 4593
42	20.8523 7366	22.9892 9806	92	775.4944 8056	960.2617 9999
43	22.4163 0168	24.7709 6866	93	833.6565 6660	1034.6820 8949
44	24.0975 2431	26.6907 1873	94	896.1808 0910	1114.8699 5143
45	25.9048 3863	28.7592 4943	95	963.3943 6978	1201.2723 7266
46	27.8477 0153	30.9880 9126	96	1035.6489 4751	1294.3709 8155
47	29.9362 7915	33.3896 6833	97	1113.3226 1858	1394.6847 3262
48	32.1815 0008	35.9773 6763	98	1196.8218 1497	1502.7727 9939
49	34.5951 1259	38.7656 1362	99	1286.5834 5109	1619.2376 9135
50	37.1897 4603	41.7699 4868	100	1383.0772 0993	1744.7286 1243

Annos	8 %	8 1/4 %	Annos	8 %	8 1/4 %
1	1.0800 0000	1.0825 0000	51	50.6537 4151	56.9932 1500
2	1.1664 0000	1.1718 0625	52	54.7060 4084	61.6951 5523
3	1.2597 1200	1.2684 8027	53	59.0825 2410	66.7850 0554
4	1.3604 8896	1.3731 2989	54	63.8091 2603	72.2947 6850
5	1.4693 2808	1.4864 1310	55	68.9138 5611	78.2590 8690
6	1.5868 7432	1 6090 4218	56	74.4269 6460	84.7154 6157
7	1.7138 2427	1.7417 8816	57	80.3811 2177	91.7044 8715
8	1.8509 3021	1.8854 8569	58	86.8116 1151	99.2701 0734
9	1.9990 0463	2.0410 3826	59	93.7565 4043	107.4598 9119
10	2.1589 2500	2.2094 2391	60	101.2570 6367	116.3253 3222
11	2.3316 3900	2.3917 0139	61	109.3576 2876	125.9221 7213
12	2.5181 7012	2.5890 1675	62	118.1062 3906	136.3107 5133
13	2.7196 2373	2.8026 1063	63	127.5547 3819	147.5563 8831
14	2.9371 9362	3.0338 2601	64	137.7591 1724	159.7297 9035
15	3.1721 6911	3.2841 1666	65	148.7798 4662	172.9074 9805
16	3.4259 4264	3.5550 5628	66	160.6822 3435	187.1723 6664
17	3.7000 1805	3.8483 4842	67	173.5368 1310	202.6140 8689
18	3.9960 1950	4.1658 3717	68	187.4197 5814	219.3297 4905
19	4.3157 0106	4.5095 1873	69	202.4133 3880	237.4244 5335
20	4.6609 5714	4.8815 5403	70	218.6064 0590	257.0119 7075
21	5.0338 3372	5.2842 8224	71	236.0949 1837	278.2154 5834
22	5.4365 4041	5.7202 3552	72	254.9825 1184	301.1682 3365
23	5.8714 6365	6.1921 5495	73	275.3811 1279	326.0146 1293
24	6.3411 8074	6.7030 0774	74	297.4116 0181	352.9108 1850
25	6.8484 7520	7.2560 0587	75	321.2045 2995	382.0259 6102
26	7.3963 5321	7.8546 2636	76	346.9008 9236	413.5431 0281
27	7.9880 6147	8.5026 3303	77	374.6529 6374	447.6604 0879
28	8.6271 0639	9.2041 0026	78	404.6252 0084	484.5923 9251
29	9.3172 7490	9.9634 3853	79	436.9952 1691	524.5712 6490
30	10.0626 5689	10.7854 2221	80	471.9548 3426	567.8483 9425
31	10.8676 6944	11.6752 1954	81	509.7112 2100	614.6958 8677
32	11.7370 8300	12.6384 2515	82	550.4881 1868	665.4082 9743
33	12.6760 4963	13.6810 9523	83	594.5271 6818	720.3044 8197
34	13.6901 3361	14.8097 8558	84	642.0893 4163	779.7296 0173
35	14.7853 4429	16.0315 9290	85	693.4564 8896	844.0572 9388
36	15.9681 7184	17.3541 9931	86	748.9330 0808	913.6920 2062
37	17.2456 2558	18.7859 2075	87	808.8476 4873	989.0716 1232
38	18.6252 7563	20.3357 5921	88	873.5554 6062	1070.6700 2034
39	20.1152 9768	22.0134 5935	89	943.4398 9747	1159.0002 9702
40	21.7245 2150	23.8295 6975	90	1018.9150 8927	1254.6178 2152
41	23.4624 8322	25.7955 0925	91	1100.4282 9641	1358.1237 9180
42	25.3394 8187	27.9236 3876	92	1188.4625 6013	1470.1690 0462
43	27.3666 4042	30.2273 3896	93	1283.5395 6494	1591.4579 4750
44	29.5559 7166	32.7210 9442	94	1386.2227 3013	1722.7532 2817
45	31.9204 4939	35.4205 8471	95	1497.1205 4854	1864.8803 6950
46	34.4740 8534	38.3427 8295	96	1616.8901 9242	2018.7329 9998
47	37.2320 1217	41.5060 6255	97	1746.2414 0782	2185.2784 7248
48	40.2105 7314	44.9303 1271	98	1885.9407 2044	2365.5639 4646
49	43.4274 1899	48.6370 6351	99	2036.8159 7808	2560.7229 7204
50	46.9016 1251	52.6496 2124	100	2199.7612 5632	2771.9826 1723

Annos	8 1/2 %	8 3/4 %	Annos	8 1/2 %	8 3/4 %
1	1.0850 0000	1.0875 0000	51	64.1086 5233	72.0929 0850
2	1.1772 2500	1.1826 5625	52	69.5578 8778	78.4010 3799
3	1.2772 8913	1.2861 3867	53	75.4703 0824	85.2611 2882
4	1.3858 5870	1.3986 7581	54	81.8852 8444	92.7214 7759
5	1.5036 5669	1.5210 5994	55	88.8455 3362	100.8346 0688
6	1.6314 6751	1.6541 5268	56	96.3974 0398	109.6576 3498
7	1.7701 4225	1.7988 9104	57	104.5911 8332	119.2526 7804
8	1.9206 0434	1.9562 9401	58	113.4814 3390	129.6872 8737
9	2.0838 5571	2.1274 6974	59	123.1273 5578	141.0349 2502
10	2.2609 8344	2.3136 2334	60	133.5931 8102	153.3754 8096
11	2.4531 6703	2.5160 6538	61	144.9486 0141	166.7958 3554
12	2.6616 8623	2.7362 2110	62	157.2692 3253	181.3904 7115
13	2.8879 2956	2.9756 4045	63	170.6371 1729	197.2621 3737
14	3.1334 0357	3.2360 0898	64	185.1412 7226	214.5225 7439
15	3.3997 4288	3.5191 5977	65	200.8782 8041	233.2932 9965
16	3.6887 2102	3.8270 8625	66	217.9529 3424	253.7064 6337
17	4.0022 6231	4.1619 5630	67	236.4789 3365	275.9057 7892
18	4.3424 5461	4.5261 2747	68	256.5796 4301	300.0475 3457
19	4.7115 6325	4.9221 6363	69	278.3889 1267	326.3016 9385
20	5.1120 4612	5.3528 5295	70	302.0519 7024	354.8530 9206
21	5.5465 7005	5.8212 2758	71	327.7263 8771	385.9027 3762
22	6.0180 2850	6.3305 8499	72	355.5831 3067	419.6692 2716
23	6.5295 6092	6.8845 1118	73	385.8076 9678	456.3902 8454
24	7.0845 7360	7.4869 0591	74	418.6013 5100	496.3244 3443
25	7.6867 6236	8.1420 1017	75	454.1824 6584	539.7528 2245
26	8.3401 3716	8.8544 3606	76	492.7879 7543	586.9811 9441
27	9.0490 4881	9.6291 9922	77	534.6749 5335	638.3420 4892
28	9.8182 1796	10.4717 5415	78	580.1223 2438	694.1969 7820
29	10.6527 6649	11.3880 3264	79	629.4327 2195	754.9392 1379
30	11.5582 5164	12.3844 8549	80	682.9345 0332	820.9963 9500
31	12.5407 0303	13.4681 2797	81	740.9839 3610	892.8335 7956
32	13.6066 6279	14.6465 8917	82	803.9675 7067	970.9565 1777
33	14.7632 2913	15.9281 6573	83	872.3048 1418	1055.9152 1308
34	16.0181 0360	17.3218 8023	84	946.4507 2338	1148.3077 9422
35	17 3796 4241	18.8375 4475	85	1026.8990 3487	1248.7947 2722
36	18.8569 1201	20.4858 2991	86	1114.1854 5283	1358.0533 8976
37	20.4597 4953	22.2783 4003	87	1208.8912 1633	1476.8830 6137
38	22.1988 2824	24.2276 9478	88	1311,6469 6971	1606.1103 2924
39	24.0857 2865	26.3476 1807	89	1423.1369 6214	1746.6449 8304
40	26.1330 1558	28.6530 3466	90	1544.1036 0392	1899.4764 1906
41	28.3543 2190	31.1601 7519	91	1675.3524 1025	2065.6806 0573
42	30.7644 3927	33.8866 9052	92	1817.7573 6512	2246.4276 5873
43	33.3794 1660	36.8517 7594	93	1972.2667 4116	2442.9900 7887
44	36.2166 6702	40.0763 0633	94	2139.9094 1416	2656.7517 1077
45	39.2950 8371	43.5829 8314	95	2321.8017 1436	2889.2174 8546
46	42.6351 6583	47.3964 9416	96	2519.1548 6008	3142.0240 1544
47	46.2591 5492	51.5436 8740	97	2733.2830 2319	3416.9511 1679
48	50.1911 8309	56.0537 6005	98	2965.6120 8016	3715.9343 3951
49	54.4574 3365	60.9584 6405	99	3217.6891 0698	4041.0785 9422
50	59.0863 1551	66.2923 2966	100	3491.1926 8107	4394.6729 7121

Annos	9 %	9 1/4 %	Annos	9 %	9 1/4 %
1	1.0900 0000	1.0925 0000	51	81.0496 9688	91.0948 2959
2	1.1881 0000	1.1935 5625	52	88.3441 6960	99.5211 0133
3	1.2950 2900	1.3039 6020	53	96.2951 4487	108.7268 0320
4	1.4115 8161	1.4245 7652	54	104.9617 0790	118.7840 3250
5	1.5386 2395	1.5563 4985	55	114.4082 6162	129.7715 5551
6	1.6771 0011	1.7003 1221	56	124.7050 0516	141.7754 2439
7	1.8280 3912	1.8575 9109	57	135.9284 5563	154.8896 5115
8	1.9925 6264	2.0294 1827	58	148.1620 1663	169.2169 4388
9	2.1718 9328	2.2171 3946	59	161.4965 9813	184.8695 1119
10	2.3673 6367	2.4222 2486	60	176.0312 9196	201.9699 4097
11	2.5804 2641	2.6462 8066	61	191.8741 0824	220.6521 6051
12	2.8126 6478	2.8910 6162	62	209.1427 7798	241.0624 8536
13	3.0658 0461	3.1584 8482	63	227.9656 2800	263.3607 6525
14	3.3417 2703	3.4506 4466	64	248.4825 3452	287.7216 3604
15	3.6424 8246	3.7698 2929	65	270.8459 6262	314 3358 8737
16	3.9703 0588	4.1185 3850	66	295.2220 9926	343.4119 5696
17	4.3276 3341	4.4995 0331	67	321.7920 8819	375.1775 6297
18	4.7171 2042	4.9157 0737	68	350.7533 7613	409.8814 8755
19	5.1416 6125	5.3704 1030	69	382.3211 7998	447.7955 2515
20	5.6044 1077	5.8671 7325	70	416.7300 8618	489.2166 1122
21	6.1088 0774	6.4098 8678	71	454.2357 9393	534.4691 4776
22	6.6586 0043	7.0028 0131	72	495.1170 1539	583.9075 4393
23	7.2578 7447	7.6505 6043	73	539.6775 4677	637.9189 9174
24	7.9110 8317	8.3582 3727	74	588.2485 2598	696.9264 9848
25	8.6230 8066	9.1313 7421	75	641.1908 9332	761.3921 9959
26	9.3991 5792	9.9760 2633	76	698.8980 7372	831.8209 7805
27	10.2450 8213	10.8988 0877	77	761.7989 0035	908.7644 1852
28	11.1671 3952	11.9069 4858	78	830.3608 0139	992.8251 2724
29	12.1721 8208	13.8083 4132	79	905.0932 7351	1084.6614 5150
30	13.2676 7847	14.2116 1289	80	986.5516 6813	1184.9926 3577
31	14.4617 6953	15.5261 8708	81	1075.3413 1826	1294.6044 5458
32	15.7633 2879	16.9623 5939	82	1172.1220 3690	1414.3553 6663
33	17.1820 2838	18.5313 7763	83	1277.6130 2022	1545.1832 3804
34	18.7284 1093	20.2455 3006	84	1392.5981 9204	1688.1126 8756
35	20.4139 6792	22.1182 4159	85	1517.9320 2933	1844.2631 1116
36	22.2512 2503	24.1641 7894	86	1654.5459 1196	2014.8574 4894
37	24.2538 3528	26.3993 6549	87	1803.4550 4404	2201.2317 6296
38	26.4366 8046	28.8413 0680	88	1965.7659 9801	2404.8457 0104
39	28.8159 8170	31.5091 2768	89	2142.6849 3783	2627.2939 2839
40	31.4094 2005	34.4237 2199	90	2335.5265 8223	2870.3186 1676
41	34.2362 6786	37.6079 1628	91	2545.7239 7463	3135.8230 8881
42	37.3175 3197	41.0866 4853	92	2774.8391 3235	3425.8867 2453
43	40.6761 0984	44.8871 6352	93	3024.5746 5426	3742.7812 4654
44	44.3369 5973	49.0392 2615	94	3296.7863 7314	4088.9885 1185
45	48.3272 8610	53.5753 5456	95	3593.4971 4672	4467.2199 4920
46	52.6767 4185	58.5310 7486	96	3916.9118 8993	4880.4377 9450
47	57.4176 4862	63.9451 9929	97	4269.4339 6002	5331.8782 9049
48	62.5852 3700	69.8601 3022	98	4653.6830 1643	5825.0770 3236
49	68.2179 0833	76.3221 9227	99	5072.5144 8790	6363.8966 5785
50	74.3575 2008	83.3819 9505	100	5529.0407 9181	6952.5570 9870

Annos	9 1/2 %	9 3/4 %	Annos	9 1/2 %	9 3/4 %
1	1.0950 0000	1.0975 0000	51	102.3575 9614	114.9822 9550
2	1.1990 2500	1.2045 0625	52	112.0815 6778	126.1930 6931
3	1.3129 3238	1.3219 4561	53	122.7293 1672	138.4968 9357
4	1.4376 6095	1.4508 3531	54	134.3886 0181	152.0003 4069
5	1.5742 3874	1.5922 9175	55	147.1555 1898	166.8203 7391
6	1.7237 9142	1.7475 4019	56	161.1352 9328	183.0853 6036
7	1.8875 5161	1.9179 2536	57	176.4431 4614	200.9361 8300
8	2.0668 6901	2.1049 2309	58	193.2052 4502	220.5274 6084
9	2.2632 2156	2.3101 5309	59	211.5597 4330	242.0288 8827
10	2.4782 2761	2.5353 9301	60	231.6579 1892	265.6267 0488
11	2.7136 5924	2.7825 9383	61	253.6654 2121	291.5253 0861
12	2.9714 5686	3.0538 9673	62	277.7636 3623	319.9490 2620
13	3.2537 4527	3.3516 5166	63	304.1511 8167	351.1440 5625
14	3.5628 5107	3.6784 3770	64	333.0455 4393	385.3806 0173
15	3.9013 2192	4.0370 8537	65	364.6848 7060	422.9552 1040
16	4.2719 4750	4.4307 0120	66	399.3299 3331	464.1933 4342
17	4.6777 8251	4.8626 9456	67	437.2662 7697	509.4521 9440
18	5.1221 7185	5.3368 0728	68	478.8065 7329	559.1237 8335
19	5.6087 7818	5.8571 4599	69	524.2931 9775	613.6383 5223
20	6.1416 1210	6.4282 1773	70	574.1010 5153	673.4680 9157
21	6.7250 6525	7.0549 6896	71	628.6406 5143	739.1312 3050
22	7.3639 4645	7.7428 2843	72	688.3615 1331	811.1965 2548
23	8.0635 2137	8.4977 5420	73	753.7558 5708	890.2881 8671
24	8.8295 5590	9.3262 8524	74	825.3626 6350	977.0912 8491
25	9.6683 6371	10.2355 9805	75	903.7721 1653	1072.3576 8519
26	10.5868 5826	11.2335 6886	76	989.6304 6761	1176.9125 5950
27	11.5926 0979	12.3288 4182	77	1083.6453 6203	1291.6615 3405
28	12.6939 0772	13.5309 0390	78	1186.5916 7142	1417.5985 3362
29	13.8998 2896	14.8501 6703	79	1299.3178 8021	1555.8143 9065
30	15.2203 1271	16.2980 5832	80	1422.7530 7883	1707.5062 9374
31	16.6662 4241	17.8871 1900	81	1557.9146 2131	1873.9881 5738
32	18.2495 3544	19.6311 1310	82	1705.9165 1034	2056.7020 0272
33	19.9832 4131	21.5451 4663	83	1867.9785 7882	2257.2304 4799
34	21.8816 4924	23.6457 9843	84	2045.4365 4381	2477.3104 1667
35	23.9604 0591	25.9512 6378	85	2239.7530 1547	2718.8481 8229
36	26.2366 4448	28.4815 1199	86	2452.5295 5194	2983.9358 8006
37	28.7291 2570	31.2584 5941	87	2685.5198 5938	3274.8696 2837
38	31.4583 9264	34.3061 5921	88	2940 6442 4602	3594.1694 1714
39	34.4469 3994	37.6510 0973	89	3220.0054 4939	3944.6009 3531
40	37.7193 9924	41.3219 8318	90	3525.9059 6708	4329.1995 2650
41	41.3027 4216	45.3508 7654	91	3860.8670 3395	4751.2964 8033
42	45.2265 0267	49.7725 8700	92	4227.6494 0218	5214.5478 8716
43	49.5230 2042	54.6254 1423	93	4629.2760 9538	5722.9663 0616
44	54.2277 0736	59.9513 9212	94	5069.0573 2445	6280.9555 2101
45	59.3793 3956	65.7966 5285	95	5550.6177 7027	6893.3486 8431
46	65.0203 7682	72.2118 2650	96	6077.9264 5844	7565.4501 8103
47	71.1973 1262	79.2524 7959	97	6655.3294 7199	8303.0815 7368
48	77.9610 5732	86.9795 9635	98	7287.5857 7183	9112.6320 2712
49	85.3673 5777	95.4601 0699	99	7979.9064 2016	10001.1136 4976
50	93.4772 5675	104.7674 6742	100	8737.9975 3007	10976.2222 3061

Annos	10 %	10 ½ %	Annos	10 %	10 ½ %
1	1.1000 0000	1.1050 0000	51	129.1299 3817	162.7332 0545
2	1.2100 0000	1.2210 2500	52	142.0429 3198	179.8201 9202
3	1.3310 0000	1.3492 3263	53	156.2472 2518	198.7013 1219
4	1.4641 0000	1.4909 0205	54	171.8719 4770	219.5649 4997
5	1.6105 1000	1.6474 4677	55	189.0591 4247	242.6192 6971
6	1.7715 6100	1.8204 2868	56	207.9650 5672	268.0942 9303
7	1.9487 1710	2.0115 7369	57	228.7615 6239	296.2441 9380
8	2.1435 8881	2.2227 8892	58	251.6377 1863	327.3498 3415
9	2.3579 4769	2.4561 8176	59	276.8014 9049	361.7215 6674
10	2.5937 4246	2.7140 8085	60	304.4816 3954	399.7023 3124
11	2.8531 1671	2.9990 5934	61	334.9298 0350	441.6710 7602
12	3.1384 2838	3.3139 6057	62	368.4227 8385	488.0465 3901
13	3.4522 7121	3.6619 2643	63	405.2650 6223	539.2914 2560
14	3.7974 9834	4.0464 2870	64	445.7915 6845	595.9170 2529
15	4.1772 4817	4.4713 0371	65	490.3707 2530	658.4883 1295
16	4.5949 7299	4.9407 9060	66	539.4077 9783	727.6295 8581
17	5.0544 7028	5.4595 7362	67	593.3485 7761	804.0306 9231
18	5.5599 1731	6.0328 2885	68	652.6834 3537	888.4539 1501
19	6.1159 0904	6.6662 7588	69	717.9517 7891	981.7415 7608
20	6.7274 9995	7.3662 3484	70	789.7469 5680	1084.8244 4157
21	7.4002 4994	8.1396 8950	71	868.7216 5248	1198.7310 0794
22	8.1402 7494	8.9943 5690	72	955.5938 1772	1324.5977 6377
23	8.9543 0243	9.9387 6437	73	1051.1531 9950	1463.6805 2897
24	9.8497 3268	10.9823 3463	74	1156.2685 1945	1617.3669 8451
25	10.8347 0594	12.1354 7977	75	1271.8953 7140	1787.1905 1788
26	11.9181 7654	13.4097 0514	76	1399.0849 0853	1974.8455 2226
27	13.1099 9419	14.8177 2418	77	1538.9933 9939	2182.2043 0210
28	14.4209 9361	16.3735 8522	78	1692.8927 3933	2411.3357 5382
29	15.8630 9297	18.0928 1167	79	1862.1820 1326	2664.5260 0797
30	17.4494 0227	19.9925 5690	80	2048.4002 1459	2944.3012 3880
31	19.1943 4250	22.0917 7537	81	2253.2402 3604	3253.4528 6888
32	21.1137 7675	24.4114 1178	82	2478.5642 5965	3595.0654 2011
33	23.2251 5442	26.9746 1002	83	2726.4206 8561	3972.5472 8922
34	25.5476 6986	29.8069 4407	84	2999.0627 5417	4389.6647 5459
35	28.1024 3685	32.9366 7320	85	3298.9690 2959	4850.5795 5382
36	30.9126 8053	36.3950 2389	86	3628.8659 3255	5359.8904 0697
37	34.0039 4859	40.2165 0140	87	3991.7525 2581	5922.6788 9971
38	37.4043 4344	44.4392 3404	88	4390.9277 7839	6544.5601 8417
39	41.1447 7779	49.1053 5362	89	4830.0205 5623	7231.7390 0351
40	45.2592 5557	54.2614 1575	90	5313.0226 1185	7991.0715 9888
41	49.7851 8112	59.9588 6440	91	5844.3248 7303	8830.1341 1676
42	54.7636 9924	66.2545 4516	92	6428.7573 6034	9757.2981 9902
43	60.2400 6916	73.2112 7240	93	7071.6330 9637	10781.8145 0992
44	66.2640 7608	80.8984 5601	94	7778.7964 0601	11913.9050 3346
45	72.8904 8369	89.3927 9389	95	8556.6760 4661	13164.8650 6198
46	80.1795 3205	98.7790 3724	96	9412.3436 5127	14547.1758 9349
47	88.1974 8526	109.1508 3616	97	10353.5780 1640	16074.6293 6230
48	97.0172 3378	120.6116 7395	98	11388.9358 1803	17762.4654 4534
49	106.7189 5716	133.2758 9972	99	12527.8293 9984	19627.5243 1710
50	117.3908 5288	147.2698 6919	100	13780.6123 3982	21688.4143 7040

Annos	11 %	12 %	Annos	11 %	12 %
1	1.1100 0000	1.1200 0000	51	204.8669 5768	323.6824 5261
2	1.2321 0000	1.2544 0000	52	227.4023 2303	362.5243 4692
3	1.3676 3100	1.4049 2800	53	252.4165 7856	406.0272 6855
4	1.5180 7041	1.5735 1936	54	280.1824 0220	454.7505 4078
5	1.6850 5816	1.7623 4168	55	311.0024 6644	509.3206 0567
6	1.8704 1455	1.9738 2269	56	345.2127 3775	570.4390 7835
7	2.0761 6015	2.2106 8141	57	383.1861 3890	638.8917 6776
8	2.3045 3777	2.4759 6318	58	425.3366 1418	715.5587 7989
9	2.5580 3692	2.7730 7876	59	472.1236 4174	801.4258 3347
10	2.8394 2099	3.1058 4821	60	524.0572 4234	897.5969 3349
11	3.1517 5729	3.4785 4999	61	581.7035 3899	1005.3085 6551
12	3.4984 5060	3.8959 7599	62	644.6909 2828	1125.9455 9337
13	3.8832 8016	4.3634 9311	63	716.7169 3039	1261.0590 6458
14	4.3104 4098	4.8871 1229	64	795.5557 9274	1412.3861 5232
15	4.7845 8949	5.4735 6576	65	883.0669 2994	1581.8724 9060
16	5.3108 9433	6.1303 9365	66	980.2042 9223	1771.6971 8948
17	5.8950 9271	6.8660 4089	67	1088.0267 6438	1984.3008 5221
18	6.5435 5291	7.6899 6580	68	1207.7097 0846	2222.4169 5448
19	7.2633 4373	8.6127 6169	69	1340.5577 7639	2489.1069 8902
20	8.0623 1154	9.6462 9309	70	1488.0191 3179	2787.7998 2770
21	8.9491 6581	10.8038 4826	71	1651.7012 3629	3122.3358 0702
22	9.9335 7404	12.1003 1006	72	1833.3883 7228	3497.0161 0386
23	11.0262 6719	13.5523 4726	73	2035.0610 9323	3916.6580 3633
24	12.2391 5658	15.1786 2893	74	2258.9178 1349	4386.6570 0069
25	13.5854 6380	17.0000 6441	75	2507.3987 7297	4913.0558 4077
26	15.0798 6482	19.0400 7214	76	2783.2126 3800	5502.6225 4166
27	16.7386 4995	21.3248 8079	77	3089.3660 2818	6162.9372 4666
28	18.5799 0145	23.8838 6649	78	3429.1962 9128	6902.4897 1626
29	20.6236 9061	26.7499 3047	79	3805.4078 8332	7730.7884 8221
30	22.8922 9657	29.9599 2212	80	4225.1127 5048	8658.4831 0008
31	25.4104 4919	33.5551 1278	81	4689.8751 5303	9697.5010 7209
32	28.2055 9861	37.5817 2631	82	5205.7614 1987	10861.2012 0074
33	31.3082 1445	42.0915 3347	83	5778.3951 7605	12164.5453 4483
34	34.7521 1804	47.1425 1748	84	6414.0186 4542	13624.2907 8621
35	38.5748 5103	52.7996 1958	85	7119.5606 9641	15259.2056 8055
36	42.8180 8464	59.1355 7393	86	7902.7123 7302	17090.3103 6222
37	47.5280 7395	66.2318 4280	87	8772.0107 3405	19141.1476 0569
38	52.7561 6209	74.1796 6394	88	9736.9319 1480	21438.0853 1837
39	58.5593 3991	83.0812 2361	89	10807.9944 2542	24010.6555 5657
40	65.0008 6731	93.0509 7044	90	11996.8738 1222	26891.9342 2336
41	72.1509 6271	104.2170 8689	91	13316.5299 3157	30118.9663 3016
42	80.0875 6861	116.7231 3732	92	14781.3482 2404	33733.2422 8978
43	88.8972 0115	130.7299 1380	93	16407.2965 2868	37781.2313 6456
44	98.6758 9328	146.4175 0346	94	18212.0991 4684	42314.9791 2830
45	109.5302 4154	163.9876 0387	95	20215.4300 5299	47392.7766 2370
46	121.5785 6811	183.6661 1634	96	22438.1273 5882	53079.9098 1855
47	134.9522 1060	205.7060 5030	97	24907.4313 6829	59449.4989 9677
48	149.7969 5377	230.3907 7633	98	27647.2488 1880	66583.4388 7638
49	166.2746 1868	258.0376 6949	99	30688.4461 8887	74573.4515 4155
50	184.5648 2674	289.0021 8983	100	34064.1752 6964	83522.2657 2654

1.º SUPPLEMENTO Á TABOA — I

Valor do Capital 1 com os seus juros em prazos de 101 a 200 annos, afim de facilitar os calculos de pagamento de juros aos trimestres em largos prazos.

Para as seguintes taxas, que são a quarta parte das de uso mais frequente:

$$1^1/_2,\ 1^3/_4,\ 2,\ 2^1/_4,\ 2^1/_2,\ 3.$$

Veja-se a NOTA do § 1º da Secç. I.

Obtem-se os logarithmos das quantidades desta Taboa, multiplicando os logarithmos de 1 com o seu juro á taxa respectiva (fornecidos pela Tab. VII) pelo numero de annos:

$$\log r^n = n \cdot \log (1+i).$$

Annos	1 1/2 %	1 3/4 %	Annos	1 1/2 %	1 3/4 %
101	4.4985 2633	5.7673 4867	151	9.4704 8847	13.7308 3987
102	4.5660 0423	5.8682 7727	152	9.6125 4580	13.9711 2957
103	4.6344 9429	5.9709 7212	153	9.7567 3398	14.2156 2434
104	4.7040 1171	6.0754 6413	154	9.9030 8499	14.4643 9776
105	4.7745 7188	6.1817 8476	155	10.0516 3127	14.7175 2472
106	4.8461 9046	6.2899 6599	156	10.2024 0574	14.9750 8141
107	4.9188 8332	6.4000 4039	157	10.3554 4182	15.2371 4533
108	4.9926 6657	6.5120 4110	158	10.5107 7345	15.5037 9538
109	5.0675 5657	6.6260 0182	159	10.6684 3505	15.7751 1179
110	5.1435 6991	6.7419 5685	160	10.8284 6158	16.0511 7625
111	5.2207 2346	6.8599 4110	161	10.9908 8850	16.3320 7184
112	5.2990 3432	6.9799 9007	162	11.1557 5183	16.6178 8309
113	5.3785 1983	7.1021 3989	163	11.3230 8811	16.9086 9605
114	5.4591 9763	7.2264 2734	164	11.4929 3443	17.2045 9823
115	5.5410 8559	7.3528 8982	165	11.6653 2844	17.5056 7870
116	5.6242 0188	7.4815 6539	166	11.8403 0837	17.8120 2807
117	5.7085 6490	7.6124 9278	167	12.0179 1300	18.1237 3856
118	5.7941 9338	7.7457 1141	168	12.1981 8169	18.4409 0399
119	5.8811 0628	7.8812 6136	169	12.3811 5442	18.7636 1981
120	5.9693 2287	8.0191 8343	170	12.5668 7173	19.0919 8316
121	6.0588 6272	8.1595 1914	171	12.7553 7481	19.4260 9286
122	6.1497 4566	8.3023 1073	172	12.9467 0543	19.7660 4949
123	6.2419 9184	8.4476 0116	173	13.1409 0601	20.1119 5535
124	6.3356 2172	8.5954 3418	174	13.3380 1960	20.4639 1457
125	6.4306 5604	8.7458 5428	175	13.5380 8990	20.8220 3308
126	6.5271 1589	8.8989 0673	176	13.7411 6125	21.1864 1865
127	6.6250 2262	9.0546 3760	177	13.9472 7866	21.5571 8098
128	6.7243 9796	9.2130 9376	178	14.1564 8784	21.9344 3165
129	6.8252 6393	9.3743 2290	179	14.3688 3516	22.3182 8420
130	6.9276 4289	9.5383 7355	180	14.5843 6769	22.7088 5418
131	7.0315 5753	9.7052 9509	181	14.8031 3320	23.1062 5912
132	7.1370 3090	9.8751 3775	182	15.0251 8020	23.5106 1866
133	7.2440 8636	10.0479 5266	183	15.2505 5791	23.9220 5448
134	7.3527 4766	10.2237 9183	184	15.4793 1627	24.3406 9044
135	7.4630 3887	10.4027 0819	185	15.7115 0602	24.7666 5252
136	7.5749 8445	10.5847 5558	186	15.9471 7861	25.2000 6894
137	7.6886 0922	10.7699 8881	187	16.1863 8629	25.6410 7015
138	7.8039 3836	10.9584 6361	188	16.4291 8208	26.0897 8887
139	7.9209 9743	11.1502 3672	189	16.6756 1981	26.5463 6018
140	8.0398 1240	11.3453 6587	190	16.9257 5411	27.0109 2148
141	8.1604 0958	11.5439 0977	191	17.1796 4042	27.4836 1261
142	8.2828 1573	11.7459 2819	192	17.4373 3503	27.9645 7583
143	8.4070 5796	11.9514 8193	193	17.6988 9505	28.4539 5591
144	8.5331 6383	12.1606 3287	194	17.9643 7848	28.9519 0013
145	8.6611 6129	12.3734 4394	195	18.2338 4416	29.4585 5839
146	8.7910 7871	12.5899 7921	196	18.5073 5182	29.9740 8316
147	8.9229 4489	12.8103 0385	197	18.7849 6210	30.4986 2961
148	9.0567 8906	13.0344 8416	198	19.0667 3653	31.0323 5563
149	9.1926 4090	13.2625 8764	199	19.3527 3758	31.5754 2186
150	9.3305 3051	13.4946 8292	200	19.6430 2864	32.1279 9174

Annos	2 %	2 1/4 %	Annos	2 %	2 1/4 %
101	7.3895 3904	9.4622 6234	151	19.8895 9482	28.7846 4108
102	7.5373 2982	9.6751 6324	152	20.2873 8672	29.4322 9551
103	7.6880 7642	9.8928 5442	153	20.6931 3445	30.0945 2216
104	7.8418 3795	10.1154 4364	154	21.1069 9714	30.7716 4890
105	7.9986 7471	10.3430 4112	155	21.5291 3708	31.4640 1101
106	8.1586 4820	10.5757 5955	156	21.9597 1983	32.1719 5125
107	8.3218 2116	10.8137 1414	157	22.3989 1422	32.8958 2016
108	8.4882 5759	11.0570 2270	158	22.8468 9251	33.6359 7611
109	8.6580 2274	11.3058 0572	159	23.3038 3036	34.3927 8557
110	8.8311 8319	11.5601 8634	160	23.7699 0696	35.1666 2325
111	9.0078 0686	11.8202 9054	161	24.2453 0510	35.9578 7227
112	9.1879 6299	12.0862 4707	162	24.7302 1121	36.7669 2440
113	9.3717 2225	12.3581 8763	163	25.2248 1543	37.5941 8020
114	9.5591 5670	12.6362 4685	164	25.7293 1174	38.4400 4925
115	9.7503 3983	12.9205 6241	165	26.2438 9797	39.3049 5036
116	9.9453 4663	13.2112 7506	166	26.7687 7593	40.1893 1174
117	10.1442 5356	13.5085 2875	167	27.3041 5145	41.0935 7126
118	10.3471 3863	13.8124 7065	168	27.8502 3448	42.0181 7661
119	10.5540 8141	14.1232 5124	169	28.4072 3917	42.9635 8558
120	10.7651 6303	14.4410 2439	170	28.9753 8395	43.9302 6626
121	10.9804 6629	14.7659 4744	171	29.5548 9163	44.9186 9725
122	11.2000 7562	15.0981 8126	172	30.1459 8947	45.9293 6794
123	11.4240 7713	15.4378 9034	173	30.7489 0925	46.9627 7871
124	11.6525 5868	15.7852 4287	174	31.3638 8744	48.0194 4124
125	11.8856 0985	16.1404 1083	175	31.9911 6519	49.0998 7866
126	12.1233 2205	16.5035 7008	176	32.6309 8849	50.2046 2593
127	12.3657 8849	16.8749 0040	177	33.2836 0826	51.3342 3002
128	12.6131 0426	17.2545 8566	178	33.9492 8043	52.4892 5019
129	12.8653 6634	17.6428 1384	179	34.6282 6604	53.6702 5832
130	13.1226 7367	18.0397 7715	180	35.3208 3136	54.8778 3913
131	13.3851 2714	18.4456 7214	181	36.0272 4798	56.1125 9051
132	13.6528 2969	18.8606 9976	182	36.7477 9294	57.3751 2380
133	13.9258 8628	19.2850 6550	183	37.4827 4880	58.6660 6409
134	14.2044 0400	19.7189 7948	184	38.2324 0378	59.9860 5053
135	14.4884 9208	20.1626 5652	185	38.9970 5185	61.3357 3667
136	14.7782 6193	20.6163 1629	186	39.7769 9289	62.7157 9074
137	15.0738 2716	21.0801 8341	187	40.5725 3275	64.1268 9603
138	15.3753 0371	21.5544 8753	188	41.3839 8340	65.5697 5119
139	15.6828 0978	22.0394 6350	189	42.2116 6307	67.0450 7060
140	15.9964 6598	22.5353 5143	190	43.0558 9633	68.5535 8468
141	16.3163 9530	23.0423 9684	191	43.9170 1426	70.0960 4034
142	16.6427 2320	23.5608 5077	192	44.7953 5455	71.6732 0125
143	16.9755 7767	24.0909 6991	193	45.6912 6164	73.2858 4827
144	17.3150 8922	24.6330 1673	194	46.6050 8687	74.9347 7986
145	17.6613 9101	25.1872 5961	195	47.5371 8861	76.6208 1241
146	18.0146 1883	25.7539 7295	196	48.4879 3238	78.3447 8069
147	18.3749 1120	26.3334 3734	197	49.4576 9103	80.1075 3825
148	18.7424 0943	26.9259 3968	198	50.4468 4485	81.9099 5786
149	19.1172 5761	27.5317 7332	199	51.4557 8174	83.7529 3191
150	19.4996 0277	28.1512 3822	200	52.4848 9738	85.6373 7288

Annos	2 1/2 %	3 %	Annos	2 1/2 %	3 %
101	12.1090 5926	19.7951 9094	151	41.6201 5317	86.7802 5670
102	12.4117 8574	20.3890 4667	152	42.6606 5700	89.3836 6441
103	12.7220 8038	21.0007 1807	153	43.7271 7342	92.0651 7434
104	13.0401 3239	21.6307 3961	154	44.8203 5276	94.8271 2957
105	13.3661 3570	22.2796 6180	155	45.9408 6158	97.6719 4346
106	13.7002 8910	22.9480 5165	156	47.0893 8312	100.6021 0176
107	14.0427 9632	23.6364 9320	157	48.2666 1770	103.6201 6481
108	14.3938 6623	24.3455 8800	158	49.4732 8314	106.7287 6976
109	14.7537 1289	25.0759 5564	159	50.7101 1522	109.9306 3285
110	15.1225 5571	25.8282 3431	160	51.9778 6810	113.2285 5183
111	15.5606 1960	26.6030 8134	161	53.2773 1480	116.6254 0839
112	15.8881 3509	27.4011 7378	162	54.6092 4767	120.1241 7064
113	16.2853 3847	28.2232 0899	163	55.9744 7886	123.7278 9576
114	16.6924 7193	29.0699 0526	164	57.3738 4083	127.4397 3263
115	17.1097 8373	29.9420 0242	165	58.8081 8685	131.2629 2461
116	17.5375 2832	30.8402 6249	166	60.2783 9152	135.2008 1235
117	17.9759 6653	31.7654 7037	167	61.7853 5131	139.2563 3672
118	18.4253 6570	32.7184 3448	168	63.3299 8510	143.4345 4182
119	18.8859 9984	33.6999 8751	169	64.9132 3472	147.7375 7808
120	19.3581 4983	34.7109 8714	170	66.5360 6559	152.1697 0542
121	19.8421 0358	35.7523 1675	171	68.1994 6723	156.7347 9658
122	20.3381 5617	36.8248 8625	172	69.9044 5391	161.4368 4048
123	20.8466 1007	37.9296 3284	173	71.6520 6526	166.2799 4569
124	21.3677 7533	39.0675 2182	174	73.4433 6689	171.2683 4406
125	21.9019 6971	40.2395 4748	175	75.2794 5106	176.4063 9439
126	22.4495 1895	41.4467 3390	176	77.1614 3734	181.6985 8622
127	23.0107 5692	42.6901 3592	177	79.0904 7327	187.1495 4380
128	23.5860 2585	43.9708 4000	178	81.0677 3510	192.7640 3012
129	24.1756 7649	45.2899 6520	179	83.0944 2848	198.5469 5102
130	24.7800 6841	46.6486 6415	180	85.1717 8919	204.5033 5955
131	25.3995 7012	48.0481 2408	181	87.3010 8392	210.6384 6034
132	26.0345 5937	49.4895 6780	182	89.4836 1102	216.9576 1415
133	26.6854 2335	50.9742 5484	183	91.7207 0130	223.4663 4257
134	27.3525 5894	52.5034 8248	184	94.0137 1883	230.1703 3285
135	28.0363 7291	54.0785 8696	185	96.3640 6180	237.0754 4284
136	28.7372 8223	55.7009 4456	186	98.7731 6335	244.1877 6612
137	29.4557 1429	57.3719 7290	187	101.2424 9243	251.5133 3731
138	30.1921 0715	59.0931 3209	188	103.7735 5474	259.0587 3742
139	30.9469 0983	60.8659 2605	189	106.3678 9361	266.8304 9955
140	31.7205 8257	62.6919 0383	190	109.0270 9095	274.8354 1453
141	32.5135 9714	64.5726 6095	191	111.7527 6822	283.0804 7697
142	33.3264 3706	66.5098 4078	192	114.5465 8743	291.5728 9128
143	34.1595 9799	68.5051 3600	193	117.4102 5211	300.3200 7802
144	35.0135 8794	70.5602 9008	194	120.3455 0842	309.3296 8036
145	35.8889 2764	72.6770 9878	195	123.3541 4613	318.6095 7077
146	36.7861 5083	74.8574 1174	196	126.4379 9978	328.1678 5789
147	37.7058 0460	77.1031 3410	197	129.5989 4978	338.0128 9363
148	38.6484 4972	79.4162 2812	198	132.8389 2352	348.1532 8044
149	39.6146 6096	81.7987 1496	199	136.1598 9661	358.5978 7885
150	40.6050 2748	84.2526 7641	200	139.5638 9402	369.3558 1522

2.º SUPPLEMENTO Á TABOA — I

Valor que o Capital 1 adquire com o seu juro correspondente ao numero de mezes indicado no alto da columna, e á taxa de juro composto ao anno indicada á margem. A sua expressão (Veja-se Secç. I § 6.º) é:

$$r^{\frac{n}{12}}.$$

Obtem-se os logarithmos das quantidades desta Taboa, multiplicando os logarithmos de 1 com o seu juro á taxa respectiva (fornecidos pela Taboa VII) pela fracção que represente o numero de mezes:

$$\log r^{\frac{n}{12}} = \frac{n}{12} \cdot \log (1+i).$$

Taxa %	1 mez	2 mezes	3 mezes	4 mezes	Taxa %
1	1.0008 2954	1.0016 5976	1.0024 9068	1.0033 2228	1
1 1/8	1.0009 3270	1.0018 6627	1.0028 0071	1.0037 3602	1 1/8
1 1/4	1.0010 3575	1.0020 7256	1.0031 1046	1.0041 4943	1 1/4
1 3/8	1.0011 3868	1.0022 7865	1.0034 1992	1.0045 6249	1 3/8
1 1/2	1.0012 4149	1.0024 8452	1.0037 2909	1.0049 7521	1 1/2
1 5/8	1.0013 4418	1.0026 9018	1.0040 3798	1.0053 8759	1 5/8
1 3/4	1.0014 4677	1.0028 9562	1.0043 4658	1.0057 9963	1 3/4
1 7/8	1.0015 4923	1.0031 0086	1.0046 5490	1.0062 1134	1 7/8
2	1.0016 5158	1.0033 0589	1.0049 6293	1.0066 2271	2
2 1/8	1.0017 5382	1.0035 1071	1.0052 7068	1.0070 3374	2 1/8
2 1/4	1.0018 5594	1.0037 1532	1.0055 7815	1.0074 4444	2 1/4
2 3/8	1.0019 5794	1.0039 1972	1.0058 8534	1.0078 5481	2 3/8
2 1/2	1.0020 5984	1.0041 2392	1.0061 9225	1.0082 6484	2 1/2
2 5/8	1.0021 6161	1.0043 2790	1.0064 9887	1.0086 7453	2 5/8
2 3/4	1.0022 6328	1.0045 3168	1.0068 0522	1.0090 8390	2 3/4
2 7/8	1.0023 6483	1.0047 3525	1.0071 1128	1.0094 9293	2 7/8
3	1.0024 6627	1.0049 3862	1.0074 1707	1.0099 0163	3
3 1/8	1.0025 6760	1.0051 4178	1.0077 2258	1.0103 1001	3 1/8
3 1/4	1.0026 6881	1.0053 4474	1.0080 2781	1.0107 1805	3 1/4
3 3/8	1.0027 6991	1.0055 4749	1.0083 3277	1.0111 2576	3 3/8
3 1/2	1.0028 7090	1.0057 5004	1.0086 3745	1.0115 3314	3 1/2
3 5/8	1.0029 7178	1.0059 5238	1.0089 4185	1.0119 4020	3 5/8
3 3/4	1.0030 7254	1.0061 5452	1.0092 4598	1.0123 4693	3 3/4
3 7/8	1.0031 7320	1.0063 5646	1.0095 4983	1.0127 5333	3 7/8
4	1.0032 7374	1.0065 5820	1.0098 5341	1.0131 5940	4
4 1/8	1.0033 7417	1.0067 5973	1.0101 5671	1.0135 6515	4 1/8
4 1/4	1.0034 7450	1.0069 6106	1.0104 5974	1.0139 7058	4 1/4
4 3/8	1.0035 7471	1.0071 6219	1.0107 6250	1.0143 7568	4 3/8
4 1/2	1.0036 7481	1.0073 6312	1.0110 6499	1.0147 8046	4 1/2
4 3/4	1.0038 7468	1.0077 6438	1.0116 6915	1.0155 8905	4 3/4
5	1.0040 7412	1.0081 6485	1.0122 7223	1.0163 9636	5
5 1/4	1.0042 7313	1.0085 6452	1.0128 7424	1.0172 0238	5 1/4
5 1/2	1.0044 7170	1.0089 6339	1.0134 7517	1.0180 0713	5 1/2
5 3/4	1.0046 6984	1.0093 6149	1.0140 7504	1.0188 1061	5 3/4
6	1.0048 6755	1.0097 5879	1,0146 7385	1.0196 1282	6
6 1/4	1.0050 6483	1.0101 5532	1 0152 7159	1.0204 1378	6 1/4
6 1/2	1.0052 6169	1.0105 5107	1.0158 6828	1.0212 1347	6 1/2
6 3/4	1.0054 5813	1.0109 4605	1.0164 6393	1.0220 1192	6 3/4
7	1.0056 5415	1.0113 4026	1.0170 5853	1.0228 0912	7
7 1/4	1.0058 4974	1.0117 3370	1.0176 5208	1.0236 0508	7 1/4
7 1/2	1.0060 4492	1.0121 2638	1.0182 4460	1.0243 9981	7 1/2
7 3/4	1.0062 3968	1.0125 1830	1.0188 3609	1.0251 9330	7 3/4
8	1.0064 3403	1.0129 0946	1.0194 2655	1.0259 8557	8
8 1/4	1.0066 2797	1.0132 9986	1.0200 1598	1.0267 7661	8 1/4
8 1/2	1.0068 2149	1.0136 8952	1.0206 0440	1.0275 6644	8 1/2
8 3/4	1.0070 1461	1.0140 7843	1.0211 9179	1.0283 5506	8 3/4
9	1.0072 0732	1.0144 6659	1.0217 7818	1.0291 4247	9
9 1/4	1.0073 9963	1.0148 5402	1.0223 6356	1.0299 2867	9 1/4
9 1/2	1.0075 9153	1.0152 4070	1.0229 4793	1.0307 1368	9 1/2
10	1.0079 7414	1.0160 1187	1.0241 1369	1.0322 8012	10

Taxa %	5 mezes	6 mezes	7 mezes	8 mezes	Taxa %
1	1.0041 5458	1.0049 8756	1.0058 2124	1.0066 5560	1
1 1/8	1.0046 7221	1.0056 0927	1.0065 4720	1.0074 8601	1 1/8
1 1/4	1.0051 8947	1.0062 3059	1.0072 7279	1.0083 1607	1 1/4
1 3/8	1.0057 0636	1.0068 5153	1.0079 9800	1.0091 4579	1 3/8
1 1/2	1.0062 2287	1.0074 7208	1.0087 2285	1.0099 7517	1 1/2
1 5/8	1.0067 3901	1.0080 9226	1.0094 4732	1.0108 0420	1 5/8
1 3/4	1.0072 5479	1.0087 1205	1.0101 7142	1.0116 3290	1 3/4
1 7/8	1.0077 7019	1.0093 3146	1.0108 9515	1.0124 6126	1 7/8
2	1.0082 8523	1.0099 5049	1.0116 1851	1.0132 8928	2
2 1/8	1.0087 9990	1.0105 6915	1.0123 4150	1.0141 1696	2 1/8
2 1/4	1.0093 1420	1.0111 8742	1.0130 6412	1.0149 4431	2 1/4
2 3/8	1.0098 2813	1.0118 0532	1.0137 8638	1.0157 7131	2 3/8
2 1/2	1.0103 4170	1.0124 2284	1.0145 0826	1.0165 9798	2 1/2
2 5/8	1.0108 5490	1.0130 3998	1.0152 2978	1.0174 2432	2 5/8
2 3/4	1.0113 6774	1.0136 5675	1.0159 5094	1.0182 5032	2 3/4
2 7/8	1.0118 8021	1.0142 7314	1.0166 7172	1.0190 7598	2 7/8
3	1.0123 9232	1.0148 8916	1.0173 9215	1.0199 0131	3
3 1/8	1.0129 0407	1.0155 0480	1.0181 1221	1.0207 2631	3 1/8
3 1/4	1.0134 1546	1.0161 2007	1.0188 3190	1.0215 5097	3 1/4
3 3/8	1.0139 2649	1.0167 3497	1.0195 5123	1.0223 7530	3 3/8
3 1/2	1.0144 3715	1.0173 4950	1.0202 7020	1.0231 9930	3 1/2
3 5/8	1.0149 4746	1.0179 6365	1.0209 8881	1.0240 2296	3 5/8
3 3/4	1.0154 5740	1.0185 7744	1.0217 0706	1.0248 4630	3 3/4
3 7/8	1.0159 6699	1.0191 9086	1.0224 2495	1.0256 6930	3 7/8
4	1.0164 7622	1.0198 0390	1.0231 4248	1.0264 9198	4
4 1/8	1.0169 8510	1.0204 1658	1.0238 5964	1.0273 1432	4 1/8
4 1/4	1.0174 9362	1.0210 2889	1.0245 7645	1.0281 3634	4 1/4
4 3/8	1.0180 0178	1.0216 4084	1.0252 9290	1.0289 5803	4 3/8
4 1/2	1.0185 0959	1.0222 5242	1.0260 0900	1.0297 7939	4 1/2
4 3/4	1.0195 2414	1.0234 7447	1.0274 4012	1.0314 2112	4 3/4
5	1.0205 3728	1.0246 9508	1.0288 6981	1.0330 6155	5
5 1/4	1.0215 4902	1.0259 1423	1.0302 9809	1.0347 0068	5 1/4
5 1/2	1.0225 5935	1.0271 3193	1.0317 2495	1.0363 3852	5 1/2
5 3/4	1.0235 6829	1.0283 4819	1.0331 5041	1.0379 7506	5 3/4
6	1.0245 7584	1.0295 6301	1.0345 7446	1.0396 1031	6
6 1/4	1.0255 8200	1.0307 7641	1.0359 9712	1.0412 4427	6 1/4
6 1/2	1.0265 8679	1.0319 8837	1.0374 1838	1.0428 7696	6 1/2
6 3/4	1.0275 9019	1.0331 9892	1.0388 3825	1.0445 0837	6 3/4
7	1.0285 9223	1.0344 0804	1.0402 5674	1.0461 3850	7
7 1/4	1.0295 9291	1.0356 1576	1.0416 7384	1 0477 6736	7 1/4
7 1/2	1.0305 9222	1.0368 2207	1.0430 8957	1.0493 9497	7 1/2
7 3/4	1.0315 9018	1.0380 2697	1.0445 0393	1.0510 2130	7 3/4
8	1.0325 8679	1.0392 3048	1.0459 1692	1.0526 4639	8
8 1/4	1.0335 8205	1.0404 3260	1.0473 2856	1.0542 7021	8 1/4
8 1/2	1.0345 7598	1.0416 3333	1.0487 3883	1.0558 9279	8 1/2
8 3/4	1.0355 6857	1.0428 3268	1.0501 4775	1.0575 1413	8 3/4
9	1.0365 5983	1.0440 3065	1.0515 5532	1.0591 3422	9
9 1/4	1.0375 4976	1.0452 2725	1.0529 6154	1.0607 5307	9 1/4
9 1/2	1.0385 3838	1.0464 2248	1.0543 6643	1.0623 7069	9 1/2
10	1.0405 1166	1.0488 0885	1.0571 7220	1.0656 0224	10

Taxa %	9 mezes	10 mezes	11 mezes	12 mezes	Taxa %
1	1.0074 9066	1.0083 2642	1.0091 6286	1.0100 0000	1
1 1/8	1.0084 2569	1.0093 6625	1.0103 0769	1.0112 5000	1 1/8
1 1/4	1.0093 6043	1.0104 0587	1.0114 5239	1.0125 0000	1 1/4
1 3/8	1.0102 9488	1.0114 4527	1.0125 9698	1.0137 5000	1 3/8
1 1/2	1.0112 2904	1.0124 8447	1.0137 4145	1.0150 0000	1 1/2
1 5/8	1.0121 6291	1.0135 2344	1.0148 8581	1.0162 5000	1 5/8
1 3/4	1.0130 9650	1.0145 6221	1.0160 3004	1.0175 0000	1 3/4
1 7/8	1.0140 2980	1.0156 0076	1.0171 7416	1.0187 5000	1 7/8
2	1.0149 6281	1.0166 3910	1.0183 1816	1.0200 0000	2
2 1/8	1.0158 9554	1.0176 7723	1.0194 6205	1.0212 5000	2 1/8
2 1/4	1.0168 2798	1.0187 1515	1.0206 0582	1.0225 0000	2 1/4
2 3/8	1.0177 6014	1.0197 5285	1.0217 4947	1.0237 5000	2 3/8
2 1/2	1.0186 9201	1.0207 9035	1.0228 9301	1.0250 0000	2 1/2
2 5/8	1.0196 2360	1.0218 2763	1.0240 3643	1.0262 5000	2 5/8
2 3/4	1.0205 5490	1.0228 6470	1.0251 7973	1.0275 0000	2 3/4
2 7/8	1.0214 8592	1.0239 0157	1.0263 2292	1.0287 5000	2 7/8
3	1.0224 1666	1.0249 3822	1.0274 6599	1.0300 0000	3
3 1/8	1.0233 4712	1.0259 7466	1.0286 0895	1.0312 5000	3 1/8
3 1/4	1.0242 7729	1.0270 1089	1.0297 5179	1.0325 0000	3 1/4
3 3/8	1.0252 0719	1.0280 4692	1.0308 9452	1.0337 5000	3 3/8
3 1/2	1.0261 3680	1.0290 8273	1.0320 3713	1.0350 0000	3 1/2
3 5/8	1.0270 6613	1.0301 1834	1.0331 7962	1.0362 5000	3 5/8
3 3/4	1.0279 9518	1.0311 5374	1.0343 2200	1.0375 0000	3 3/4
3 7/8	1.0289 2395	1.0321 8893	1.0354 6427	1.0387 5000	3 7/8
4	1.0298 5245	1.0332 2391	1.0366 0642	1.0400 0000	4
4 1/8	1.0307 8066	1.0342 5869	1.0377 4846	1.0412 5000	4 1/8
4 1/4	1.0317 0859	1.0352 9326	1.0388 9038	1.0425 0000	4 1/4
4 3/8	1.0326 3625	1.0363 2762	1.0400 3219	1.0437 5000	4 3/8
4 1/2	1.0335 6363	1.0373 6178	1.0411 7388	1.0450 0000	4 1/2
4 3/4	1.0354 1755	1.0394 2947	1.0434 5693	1.0475 0000	4 3/4
5	1.0372 7037	1.0414 9634	1.0457 3953	1.0500 0000	5
5 1/4	1.0391 2209	1.0435 6239	1.0480 2167	1.0525 0000	5 1/4
5 1/2	1.0409 7271	1.0456 2763	1.0503 0336	1.0550 0000	5 1/2
5 3/4	1.0428 2223	1.0476 9205	1.0525 8460	1.0575 0000	5 3/4
6	1.0446 7066	1.0497 5565	1.0548 6539	1.0600 0000	6
6 1/4	1.0465 1800	1.0518 1844	1.0571 4573	1.0625 0000	6 1/4
6 1/2	1.0483 6426	1.0538 8043	1.0594 2563	1.0650 0000	6 1/2
6 3/4	1.0502 0943	1.0559 4161	1.0617 0508	1.0675 0000	6 3/4
7	1.0520 5352	1.0580 0198	1.0639 8408	1.0700 0000	7
7 1/4	1.0538 9653	1.0600 6155	1.0662 6264	1.0725 0000	7 1/4
7 1/2	1.0557 3847	1.0621 2033	1.0685 4076	1.0750 0000	7 1/2
7 3/4	1.0575 7934	1.0641 7830	1.0708 1843	1.0775 0000	7 3/4
8	1.0594 1914	1.0662 3548	1.0730 9567	1.0800 0000	8
8 1/4	1.0612 5788	1.0682 9186	1.0753 7247	1.0825 0000	8 1/4
8 1/2	1.0630 9556	1.0703 4746	1.0776 4883	1.0850 0000	8 1/2
8 3/4	1.0649 3218	1.0724 0226	1.0799 2475	1.0875 0000	8 3/4
9	1.0667 6774	1.0744 5628	1.0822 0023	1.0900 0000	9
9 1/4	1.0686 0225	1.0765 0951	1.0844 7528	1.0925 0000	9 1/4
9 1/2	1.0704 3571	1.0785 6196	1.0867 4990	1.0950 0000	9 1/2
10	1.0740 9950	1.0826 6452	1.0912 9784	1.1000 0000	10

TABOA — II

Esta Taboa mostra o presente valor do capital 1 descontado pelo numero de annos indicado no mesmo alinhamento á esquerda (desde 1 até 100), á taxa de juro composto indicada no alto da columna. A sua expressão (veja-se Secç. I, § 2.º) é:

$$r^{-n}$$

TAXAS (14 DIVERSAS):

2, $2^1/_2$, 3, $3^1/_4$, $3^1/_2$, $3^3/_4$
4, $4^1/_2$
5, 6, 7, 8, 9, 10.

Os valores desta Taboa achão-se facilmente dividindo 1 pelas quantidades relativas á mesma taxa e anno da Tab. I.

Obtem-se os logarithmos das quantidades desta Taboa, tomando os complementos dos productos dos logarithmos de 1 com o seu juro (fornecidos pela Tab. VII) pelo numero de annos. (Veja-se a NOTA do § 2º da Secç. I):

$$\log r^{-n} = \text{Compl.}\ [n.\ \log\ (1+t)].$$

Annos	2 %	2 1/2 %	Annos	2 %	2 1/2 %
1	0.9803 9216	0.9756 0976	51	0.3642 4302	0.2838 4606
2	.9611 6878	.9518 1440	52	.3571 0100	.2769 2298
3	.9423 2233	.9285 9941	53	.3500 9902	.2701 6876
4	.9238 4543	.9059 5064	54	.3432 3433	.2635 7928
5	.9057 3081	.8838 5429	55	.3365 0425	.2571 5052
6	.8879 7138	.8622 9687	56	.3299 0613	.2508 7855
7	.8705 6018	.8412 6524	57	.3234 3738	.2447 5957
8	.8534 9037	.8207 4657	58	.3170 9547	.2387 8982
9	.8367 5527	.8007 2836	59	.3108 7791	.2329 6568
10	.8203 4830	.7811 9840	60	.3047 8227	.2272 8359
11	.8042 6304	.7621 4478	61	.2988 0614	.2217 4009
12	.7884 9318	.7435 5589	62	.2929 4720	.2163 3179
13	.7730 3253	.7254 2038	63	.2872 0314	.2110 5541
14	.7578 7502	.7077 2720	64	.2815 7170	.2059 0771
15	.7430 1473	.6904 6556	65	.2760 5069	.2008 8557
16	.7284 4581	.6736 2493	66	.2706 3793	.1959 8593
17	.7141 6256	.6571 9506	67	.2653 3130	.1912 0578
18	.7001 5937	.6411 6594	68	.2601 2873	.1865 4223
19	.6864 3076	.6255 2772	69	.2550 2817	.1819 9242
20	.6729 7133	.6102 7094	70	.2500 2761	.1775 5358
21	.6597 7582	.5953 8629	71	.2451 2511	.1732 2300
22	.6468 3904	.5808 6467	72	.2403 1874	.1689 9805
23	.6341 5592	.5666 9724	73	.2356 0661	.1648 7615
24	.6217 2149	.5528 7535	74	.2309 8687	.1608 5478
25	.6095 3087	.5393 9059	75	.2264 5771	.1569 3149
26	.5975 7928	.5262 3472	76	.2220 1737	.1531 0389
27	.5858 6204	.5133 9973	77	.2176 6408	.1493 6965
28	.5743 7455	.5008 7778	78	.2133 9616	.1457 2649
29	.5631 1231	.4886 6125	79	.2092 1192	.1421 7218
30	.5520 7089	.4767 4269	80	.2051 0973	.1387 0457
31	.5412 4597	.4651 1481	81	.2010 8797	.1353 2153
32	.5306 3330	.4537 7055	82	.1971 4507	.1320 2101
33	.5202 2873	.4427 0298	83	.1932 7948	.1288 0098
34	.5100 2817	.4319 0534	84	.1894 8968	.1256 5949
35	.5000 2761	.4213 7107	85	.1857 7420	.1225 9463
36	.4902 2315	.4110 9372	86	.1821 3157	.1196 0452
37	.4806 1093	.4010 6705	87	.1785 6036	.1166 8733
38	.4711 8719	.3912 8492	88	.1750 5918	.1138 4130
39	.4619 4822	.3817 4139	89	.1716 2665	.1110 6468
40	.4528 9042	.3724 3062	90	.1682 6142	.1083 5579
41	.4440 1021	.3633 4695	91	.1649 6217	.1057 1296
42	.4353 0413	.3544 8483	92	.1617 2762	.1031 3460
43	.4267 6875	.3458 3886	93	.1585 5649	.1006 1912
44	.4184 0074	.3374 0376	94	.1554 4754	.0981 6500
45	.4101 9680	.3291 7440	95	.1523 9955	.0957 7073
46	.4021 5373	.3211 4576	96	.1494 1132	.0934 3486
47	.3942 6836	.3133 1294	97	.1464 8169	.0911 5596
48	.3865 3761	.3056 7116	98	.1436 0950	.0889 3264
49	.3789 5844	.2982 1576	99	.1407 9363	.0867 5355
50	.3715 2788	.2909 4221	100	.1380 3297	.0846 4737

Annos	3 %	3 1/4 %	Annos	3 %	3 1/4 %
1	0.9708 7379	0.9685 230	51	0.2214 6318	0.1957 073
2	.9425 9591	.9380 368	52	.2150 1280	.1895 470
3	.9151 4166	.9085 102	53	.2087 5029	.1835 806
4	.8884 8705	.8799 131	54	.2026 7019	.1778 020
5	.8626 0878	.8522 160	55	.1967 6717	.1722 054
6	.8374 8426	.8253 908	56	.1910 3609	.1667 849
7	.8130 9151	.7994 100	57	.1854 7193	.1615 350
8	.7894 0923	.7742 470	58	.1800 6984	.1564 503
9	.7664 1673	.7498 760	59	.1748 2508	.1515 257
10	.7440 9391	.7262 722	60	.1697 3309	.1467 562
11	.7224 2128	.7034 113	61	.1647 8941	.1421 367
12	.7013 7988	.6812 700	62	.1599 8972	.1376 627
13	.6809 5134	.6598 257	63	.1553 2982	.1333 295
14	.6611 1781	.6390 564	64	.1508 0565	.1291 327
15	.6418 6195	.6189 408	65	.1464 1325	.1250 680
16	.6231 6694	.5994 584	66	.1421 4879	.1211 312
17	.6050 1645	.5805 892	67	.1380 0853	.1173 184
18	.5873 9461	.5623 140	68	.1339 8887	.1136 255
19	.5702 8603	.5446 141	69	.1300 8628	.1100 489
20	.5536 7575	.5274 713	70	.1262 9736	.1065 849
21	.5375 4928	.5108 680	71	.1226 1880	.1032 300
22	.5218 9250	.4947 874	72	.1190 4737	.0999 806
23	.5066 9175	.4792 130	73	.1155 7998	.0968 335
24	.4919 3374	.4641 288	74	.1122 1357	.0937 855
25	.4776 0557	.4495 195	75	.1089 4521	.0908 334
26	.4636 9473	.4353 699	76	.1057 7205	.0879 742
27	.4501 8906	.4216 658	77	.1026 9131	.0852 051
28	.4370 7675	.4083 930	78	.0997 0030	.0825 231
29	.4243 4636	.3955 380	79	.0967 9641	.0799 255
30	.4119 8676	.3830 877	80	.0939 7710	.0774 097
31	.3999 8715	.3710 292	81	.0912 3990	.0749 730
32	.3883 3703	.3593 503	82	.0885 8243	.0726 131
33	.3770 2625	.3480 391	83	.0860 0236	.0703 275
34	.3660 4490	.3370 839	84	.0834 9743	.0681 138
35	.3553 8340	.3264 735	85	.0810 6547	.0659 698
36	.3450 3243	.3161 971	86	.0787 0434	.0638 932
37	.3349 8294	.3062 441	87	.0764 1198	.0618 821
38	.3252 2615	.2966 045	88	.0741 8639	.0599 342
39	.3157 5355	.2872 683	89	.0720 2562	.0580 476
40	.3065 5684	.2782 259	90	.0699 2779	.0562 205
41	.2976 2800	.2694 682	91	.0678 9105	0.544 508
42	.2889 5922	.2609 862	92	.0659 1364	.0527 369
43	.2805 4294	.2527 711	93	.0639 9383	.0510 769
44	.2723 7178	.2448 146	94	.0621 2993	.0494 691
45	.2644 3862	.2371 086	95	.0603 2032	.0479 120
46	.2567 3653	.2296 451	96	.0585 6342	.0464 039
47	.2492 5876	.2224 166	97	.0568 5769	.0449 432
48	.2419 9880	.2154 156	98	.0552 0164	.0435 285
49	.2349 5029	.2086 349	99	.0535 9383	.0421 584
50	.2281 0708	.2020 677	100	.0520 3284	.0408 314

Annos	3 1/2 %	3 3/4 %	Annos	3 1/2 %	3 3/4 %
1	0.9661 8357	0.9638 554	51	0.1729 9843	0.1529 701
2	.9335 1070	.9290 173	52	.1671 4824	.1474 411
3	.9019 4271	.8954 383	53	.1614 9589	.1421 119
4	.8714 4223	.8630 731	54	.1560 3467	.1369 753
5	.8419 7317	.8318 777	55	.1507 5814	.1320 244
6	.8135 0064	.8018 098	56	.1456 6004	.1272 524
7	.7859 9096	.7728 287	57	.1407 3433	.1226 529
8	.7594 1156	.7448 952	58	.1359 7520	.1182 197
9	.7337 3097	.7179 712	59	.1313 7701	.1139 467
10	.7089 1881	.6920 205	60	.1269 3431	.1098 282
11	.6849 4571	.6670 077	61	.1226 4184	.1058 585
12	.6617 8330	.6428 990	62	.1184 9453	.1020 323
13	.6394 0415	.6196 617	63	.1144 8747	.0983 443
14	.6177 8179	.5972 643	64	.1106 1591	.0947 897
15	.5968 9062	.5756 764	65	.1068 7528	.0913 636
16	.5767 0591	.5548 688	66	.1032 6114	.0880 613
17	.5572 0378	.5348 133	67	.0997 6922	.0848 784
18	.5383 6114	.5154 827	68	.0963 9538	.0818 105
19	.5201 5569	.4968 508	69	.0931 3563	.0788 535
20	.5025 6588	.4788 923	70	.0899 8612	.0760 033
21	.4855 7090	.4615 830	71	.0869 4311	.0732 562
22	.4691 5063	.4448 993	72	.0840 0300	.0706 084
23	.4532 8563	.4288 186	73	.0811 6232	.0680 563
24	.4379 5713	.4133 191	74	.0784 1770	.0655 964
25	.4231 4699	.3983 799	75	.0757 6590	.0632 255
26	.4088 3767	.3839 806	76	.0732 0376	.0609 402
27	.3950 1224	.3701 018	77	.0707 2827	.0587 376
28	.3816 5434	.3567 246	78	.0683 3650	.0566 145
29	.3687 4815	.3438 309	79	.0660 2560	.0545 682
30	.3562 7841	.3314 033	80	.0637 9285	.0525 959
31	.3442 3035	.3194 249	81	.0616 3561	.0506 948
32	.3325 8971	.3078 794	82	.0595 5131	.0488 625
33	.3213 4271	.2967 512	83	.0575 3750	.0470 964
34	.3104 7605	.2860 253	84	.0555 9178	.0453 941
35	.2999 7686	.2756 870	85	.0537 1187	.0437 533
36	.2898 3272	.2657 224	86	.0518 9553	.0421 719
37	.2800 3161	.2561 180	87	.0501 4060	.0406 476
38	.2705 6194	.2468 607	88	.0484 4503	.0391 784
39	.2614 1250	.2379 380	89	.0468 0679	.0377 623
40	.2525 7247	.2293 379	90	.0452 2395	.0363 974
41	.2440 3137	.2210 486	91	.0436 9464	.0350 818
42	.2357 7910	.2130 588	92	.0422 1704	.0338 138
43	.2278 0590	.2053 579	93	.0407 8941	.0325 916
44	.2201 0231	.1979 353	94	.0394 1006	.0314 136
45	.2126 5924	.1907 811	95	.0380 7735	.0302 782
46	.2054 6787	.1838 854	96	.0367 8971	.0291 838
47	.1985 1968	.1772 389	97	.0355 4562	.0281 290
48	.1918 0645	.1708 327	98	.0343 4359	.0271 123
49	.1853 2024	.1646 580	99	.0331 8221	.0261 323
50	.1790 5337	.1587 065	100	.0320 6011	.0251 878

Annos	4 %	4 1/2 %	Annos	4 %	4 1/2 %
1	0.9615 3846	0.9569 3780	51	0.1353 0059	0.1059 4225
2	.9245 5621	.9157 2995	52	.1300 9672	.1013 8014
3	.8889 9636	.8762 9660	53	.1250 9300	.0970 1449
4	.8548 0419	.8385 6134	54	.1202 8173	.0928 3683
5	.8219 2711	.8024 5105	55	.1156 5551	.0888 3907
6	.7903 1453	.7678 9574	56	.1112 0722	.0850 1347
7	.7599 1781	.7348 2846	57	.1069 3002	.0813 5260
8	.7306 9021	.7031 8513	58	.1028 1733	.0778 4938
9	.7025 8674	.6729 0443	59	.0988 6282	.0744 9701
10	.6755 6417	.6439 2768	60	.0950 6040	.0712 8901
11	.6495 8093	.6161 9874	61	.0914 0423	.0682 1915
12	.6245 9705	.5896 6386	62	.0878 8868	.0652 8148
13	.6005 7409	.5642 7164	63	.0845 0835	.0624 7032
14	.5774 7508	.5399 7286	64	.0812 5803	.0597 8021
15	.5552 6450	.5167 2044	65	.0781 3272	.0572 0594
16	.5339 0818	.4944 6932	66	.0751 2762	.0547 4253
17	.5133 7325	.4731 7639	67	.0722 3809	.0523 8519
18	.4936 2812	.4528 0037	68	.0694 5970	.0501 2937
19	.4746 4242	.4333 0179	69	.0667 8818	.0479 7069
20	.4563 8695	.4146 4286	70	.0642 1940	.0459 0497
21	.4388 3360	.3967 8743	71	.0617 4942	.0439 2820
22	.4219 5539	.3797 0089	72	.0593 7445	.0420 3655
23	.4057 2633	.3633 5013	73	.0570 9081	.0402 2637
24	.3901 2147	.3477 0347	74	.0548 9501	.0384 9413
25	.3751 1680	.3327 3060	75	.0527 8367	.0368 3649
26	.3606 8923	.3184 0248	76	.0507 5353	.0352 5023
27	.3468 1657	.3046 9137	77	.0488 0147	.0337 3228
28	.3334 7747	.2915 7069	78	.0469 2449	.0322 7969
29	.3206 5141	.2790 1502	79	.0451 1970	.0308 8965
30	.3083 1867	.2670 0002	80	.0433 8433	.0295 5948
31	.2964 6026	.2555 0241	81	.0417 1570	.0282 8658
32	.2850 5794	.2444 9991	82	.0401 1125	.0270 6850
33	.2740 9417	.2339 7121	83	.0385 6851	.0259 0287
34	.2635 5209	.2238 9589	84	.0370 8510	.0247 8744
35	.2534 1547	.2142 5444	85	.0356 5875	.0237 2003
36	.2436 6872	.2050 2817	86	.0342 8726	.0226 9860
37	.2342 9685	.1961 9921	87	.0329 6852	.0217 2115
38	.2252 8543	.1877 5044	88	.0317 0050	.0207 8579
39	.2166 2061	.1796 6549	89	.0304 8125	.0198 9070
40	.2082 8904	.1719 2870	90	.0293 0890	.0190 3417
41	.2002 7793	.1645 2507	91	.0281 8163	.0182 1451
42	.1925 7493	.1574 4026	92	.0270 9772	.0174 3016
43	.1851 6820	.1506 6054	93	.0260 5550	.0166 7958
44	.1780 4635	.1441 7276	94	.0250 5337	.0159 6132
45	.1711 9841	.1379 6437	95	.0240 8978	.0152 7399
46	.1646 1386	.1320 2332	96	.0231 6325	.0146 1626
47	.1582 8256	.1263 3810	97	.0222 7235	.0139 8685
48	.1521 9476	.1208 9771	98	.0214 1572	.0133 8454
49	.1463 4112	.1156 9158	99	.0205 9204	.0128 0817
50	.1407 1262	.1107 0965	100	.0198 0004	.0122 5663

Annos	5 %	6 %	Annos	5 %	6 %
1	0.9523 8095	0.9433 9623	51	0.0830 5117	0.0512 1544
2	.9070 2948	.8890 9644	52	.0790 9635	.0483 1645
3	.8638 3760	.8396 1928	53	.0753 2986	.0455 8156
4	.8227 0247	.7920 9365	54	.0717 4272	.0430 0147
5	.7835 2617	.7472 5817	55	.0683 2640	.0405 6742
6	.7462 1540	.7049 6054	56	.0650 7276	.0382 7115
7	.7106 8133	.6650 5711	57	.0619 7406	.0361 0486
8	.6768 3936	.6274 1237	58	.0590 2291	.0340 6119
9	.6446 0892	.5918 9846	59	.0562 1230	.0321 3320
10	.6139 1325	.5583 9478	60	.0535 3552	.0303 1434
11	.5846 7929	.5267 8753	61	.0509 8621	.0285 9843
12	.5568 3742	.4969 6936	62	.0485 5830	.0269 7965
13	.5303 2135	.4688 3902	63	.0462 4600	.0254 5250
14	.5050 6795	.4423 0096	64	.0440 4381	.0240 1179
15	.4810 1710	.4172 6506	65	.0419 4648	.0226 5264
16	.4581 1152	.3936 4628	66	.0399 4903	.0213 7041
17	.4362 9669	.3713 6442	67	.0380 4670	.0201 6077
18	.4155 2065	.3503 4379	68	.0362 3495	.0190 1959
19	.3957 3396	.3305 1301	69	.0345 0948	.0179 4301
20	.3768 8948	.3118 0473	70	.0328 6617	.0169 2737
21	.3589 4236	.2941 5540	71	.0313 0111	.0159 6921
22	.3418 4987	.2775 0510	72	.0298 1058	.0150 6530
23	.3255 7131	.2617 9726	73	.0283 9103	.0142 1254
24	.3100 6791	.2469 7855	74	.0270 3908	.0134 0806
25	.2953 0277	.2329 9863	75	.0257 5150	.0126 4911
26	.2812 4073	.2198 1003	76	.0245 2524	.0119 3313
27	.2678 4832	.2073 6795	77	.0233 5737	.0112 5767
28	.2550 9364	.1956 3014	78	.0222 4512	.0106 2044
29	.2429 4632	.1845 5674	79	.0211 8582	.0100 1928
30	.2313 7745	.1741 1013	80	.0201 7698	.0094 5215
31	.2203 5947	.1642 5484	81	.0192 1617	.0089 1713
32	.2098 6617	.1549 5740	82	.0183 0111	.0084 1238
33	.1998 7254	.1461 8622	83	.0174 2963	.0079 3621
34	.1903 5480	.1379 1153	84	.0165 9965	.0074 8699
35	.1812 9029	.1301 0522	85	.0158 0919	.0070 6320
36	.1726 5741	.1227 4077	86	.0150 5637	.0066 6340
37	.1644 3563	.1157 9318	87	.0143 3940	.0062 8622
38	.1565 0536	.1092 3885	88	.0136 5657	.0059 3040
39	.1491 4797	.1030 5552	89	.0130 0626	.0055 9472
40	.1420 4568	.0972 2219	90	.0123 8691	.0052 7803
41	.1352 8160	.0917 1905	91	.0117 9706	.0049 7928
42	.1288 3962	.0865 2740	92	.0112 3530	.0046 9743
43	.1227 0440	.0816 2962	93	.0107 0028	.0044 3154
44	.1168 6133	.0770 0908	94	.0101 9074	.0041 8070
45	.1112 9651	.0726 5007	95	.0097 0547	.0039 4405
46	.1059 9658	.0685 3781	96	.0092 4331	.0037 2081
47	.1009 4921	.0646 5831	97	.0088 0315	.0035 1019
48	.0961 4211	.0609 9840	98	.0083 8395	.0033 1150
49	.0915 6391	.0575 4566	99	.0079 8471	.0031 2406
50	.0872 0373	.0542 8836	100	.0076 0449	.0029 4723

Annos	7 %	8 %	Annos	7 %	8 %
1	0.9345 7944	0.9259 2593	51	0.0317 2688	0.0197 4188
2	.8734 3873	.8573 3882	52	.0296 5129	.0182 7952
3	.8162 9788	.7938 3224	53	.0277 1148	.0169 2548
4	.7628 9521	.7350 2985	54	.0258 9858	.0156 7174
5	.7129 8625	.6805 8320	55	.0242 0428	.0145 1086
6	.6663 4222	.6301 6963	56	.0226 2083	.0134 3599
7	.6227 4974	.5834 9039	57	.0211 4096	.0124 4073
8	.5820 0910	.5402 6888	58	.0197 5791	.0115 1920
9	.5439 3374	.5002 4897	59	.0184 6533	.0106 6592
10	.5083 4929	.4631 9349	60	.0172 5732	.0098 7585
11	.4750 9280	.4288 8286	61	.0161 2834	.0091 4431
12	.4440 1196	.3971 1375	62	.0150 7321	.0084 6695
13	.4149 6445	.3676 9792	63	.0140 8711	.0078 3977
14	.3878 1724	.3404 6104	64	.0131 6553	.0072 5905
15	.3624 4602	.3152 4171	65	.0123 0423	.0067 2134
16	.3387 3460	.2918 9047	66	.0114 9928	.0062 2346
17	.3165 7439	.2702 6895	67	.0107 4699	.0057 6247
18	.2958 6392	.2502 4903	68	.0100 4392	.0053 3562
19	.2765 0833	.2317 1206	69	.0093 8684	.0049 4039
20	.2584 1900	.2145 4821	70	.0087 7275	.0045 7443
21	.2415 1309	.1986 5575	71	.0081 9883	.0042 3558
22	.2257 1317	.1839 4051	72	.0076 6246	.0039 2184
23	.2109 4688	.1703 1528	73	.0071 6117	.0036 3133
24	.1971 4662	.1576 9934	74	.0066 9269	.0033 6234
25	.1842 4918	.1460 1790	75	.0062 5485	.0031 1328
26	.1721 9549	.1352 0176	76	.0058 4565	.0028 8267
27	.1609 3037	.1251 8682	77	.0054 6323	.0026 6914
28	.1504 0221	.1159 1372	78	.0051 0582	.0024 7142
29	.1405 6282	.1073 2752	79	.0047 7179	.0022 8835
30	.1313 6712	.0993 7733	80	.0044 5962	.0021 1885
31	.1227 7301	.0920 1605	81	.0041 6787	.0019 6190
32	.1147 4113	.0852 0005	82	.0038 9520	.0018 1657
33	.1072 3470	.0788 8893	83	.0036 4038	.0016 8201
34	.1002 1934	.0730 4531	84	.0034 0222	.0015 5741
35	.0936 6294	.0676 3454	85	.0031 7965	.0014 4205
36	.0875 3546	.0626 2458	86	.9029 7163	.0013 3523
37	.0818 0884	.0579 8572	87	.0027 7723	.0012 3633
38	.0764 5686	.0536 9048	88	.0025 9554	.0011 4475
39	.0714 5501	.0497 1341	89	.0024 2574	.0010 5995
40	.0667 8038	.0460 3093	90	.0022 6704	.0009 8144
41	.0624 1157	.0426 2125	91	.0021 1873	.0009 0874
42	.0583 2857	.0394 6411	92	.0019 8012	.0008 4142
43	.0545 1268	.0365 4084	93	.0018 5058	.0007 7910
44	.0509 4643	.0338 3411	94	.0017 2952	.0007 2138
45	.0476 1349	.0313 2788	95	.0016 1639	.0006 6795
46	.0444 9859	.0290 0730	96	.0015 1063	.0006 1847
47	.0415 8747	.0268 5861	97	.0014 1180	.0005 7266
48	.0388 6679	.0248 6908	98	.0013 1944	.0005 3024
49	.0363 2410	.0230 2693	99	.0012 3312	.0004 9096
50	.0339 4776	.0213 2123	100	.0011 5245	.0004 5459

Annos	9 %	10 %	Annos	9 %	10 %
1	0.9174 3119	0.9090 9091	51	0.0123 3811	0.0077
2	.8416 7999	.8264 4628	52	.0113 1937	.0070
3	.7721 8348	.7513 1480	53	.0103 8474	.0064
4	.7084 2521	.6830 1346	54	.0095 2728	.0058
5	.6499 3139	.6209 2132	55	.0087 4063	.0052
6	.5962 6733	.5644 7393	56	.0080 1892	.0048
7	.5470 3424	.5131 5812	57	.0073 5681	.0043
8	.5018 6628	.4665 0738	58	.0067 4937	.0039
9	.4604 2778	.4240 9762	59	.0061 9208	.0036
10	.4224 1081	.3855 4329	60	.0056 8081	.0032
11	.3875 3285	.3504 9390	61	.0052 1175	.0029
12	.3555 3473	.3186 3082	62	.0047 8142	.0027
13	.3261 7865	.2896 6438	63	.0043 8663	.0024
14	.2992 4646	.2633 3125	64	.0040 2443	.0022
15	.2745 3804	.2393 9205	65	.0036 9214	.0020
16	.2518 6976	.2176 2914	66	.0033 8728	.0018
17	.2310 7318	.1978 4467	67	.0031 0760	.0016
18	.2119 9374	.1798 5879	68	.0028 5101	.0015
19	.1944 8967	.1635 0799	69	.0026 1560	.0013
20	.1784 3089	.1486 4363	70	.0023 9963	.0012
21	.1636 9806	.1351 3057	71	.0022 0150	.0011
22	.1501 8171	.1228 4597	72	.0020 1972	.0010
23	.1377 8139	.1116 7816	73	.0018 5296	.0009
24	.1264 0494	.1015 2560	74	.0016 9996	.0008
25	.1159 6784	.0922 9600	75	.0015 5960	.0007
26	.1063 9251	.0839 0545	76	.0014 3082	.0007
27	.0976 0781	.0762 7768	77	.0013 1268	.0006 4976
28	.0895 4845	.0693 4335	78	.0012 0430	.0005 9070
29	.0821 5454	.0630 3941	79	.0011 0486	.0005 3700
30	.0753 7114	.0573 0855	80	.0010 1363	.0004 8819
31	.0691 4783	.0520 9868	81	.0009 2994	.0004 4381
32	.0634 3838	.0473 6244	82	.0008 5315	.0004 0346
33	.0582 0035	.0430 5676	83	.0007 8271	.0003 6678
34	.0533 9481	.0391 4251	84	.0007 1808	.0003 3344
35	.0489 8607	.0355 8410	85	.0006 5879	.0003 0313
36	.0449 4135	.0323 4918	86	.0006 0440	.0002 7557
37	.0412 3059	.0294 0835	87	.0005 5449	.0002 5052
38	.0378 2623	.0267 3486	88	.0005 0871	.0002 2774
39	.0347 0296	.0243 0442	89	.0004 6670	.0002 0704
40	.0318 3758	.0220 9493	90	.0004 2813	.0001 8822
41	.0292 0879	.0200 8630	91	.0003 9282	.0001 7111
42	.0267 9706	.0182 6027	92	.0003 6038	.0001 5555
43	.0245 8446	.0166 0025	93	.0003 3063	.0001 4141
44	.0225 5455	.0150 9113	94	.0003 0333	.0001 2855
45	.0206 9224	.0137 1921	95	.0002 7828	.0001 1687
46	.0189 8371	.0124 7201	96	.0002 5530	.0001 0624
47	.0174 1625	.0113 3819	97	.0002 3422	.0000 9659
48	.0159 7821	.0103 0745	98	.0002 1488	.0000 8780
49	.0146 5891	.0093 7041	99	.0001 9714	.0000 7982
50	.0134 4854	.0085 1855	100	.0001 8086	.0000 7257

SUPPLEMENTO Á TABOA — II

Presente valor do Capital 1 descontado pelo numero de mezes indicado no alto da columna, e á taxa de juro composto ao anno indicada á margem. A sua expressão (Veja-se Secç. I § 6.º) é :

$$r^{-\frac{n}{12}}.$$

Obtem-se os logarithmos das quantidades desta Taboa, tomando os complementos dos productos dos logarithmos de 1 com o seu juro (fornecidos pela Taboa VII) pela fracção que represente o numero de mezes (Veja-se a NOTA do § 2.º da Secç. I):

$$\log r^{-\frac{n}{12}} = \text{compl.} \left[\frac{n}{12} \cdot \log (1+t)\right].$$

Taxa %	1 mez	2 mezes	3 mezes	4 mezes	Taxa %
2	0.9983 5114	0.9967 0500	0.9950 6158	0.9934 2086	2
2 1/2	.9979 4439	.9958 9302	.9938 4586	.9918 0291	2 1/2
3	.9975 3980	.9950 8565	.9926 3754	.9901 9545	3
3 1/2	.9971 3732	.9942 8283	.9914 3652	.9885 9836	3 1/2
4	.9967 3694	.9934 8453	.9902 4273	.9870 1152	4
4 1/2	.9963 3864	.9926 9070	.9890 5610	.9854 3482	4 1/2
5	.9959 4241	.9919 0121	.9878 7655	.9838 6814	5
6	.9951 5603	.9903 3552	.9855 3936	.9807 6444	6
7	.9943 7764	.9887 8690	.9832 2758	.9776 9953	7
8	.9936 0710	.9872 5507	.9809 4365	.9746 7258	8
9	.9928 4425	.9857 3971	.9786 8600	.9716 8276	9
10	.9920 8894	.9842 4047	.9764 5409	.9687 2930	10

	5 mezes	6 mezes	7 mezes	8 mezes	
2	0.9917 8285	0.9901 4755	0.9885 1493	0.9868 8501	2
2 1/2	.9897 6416	.9877 2959	.9856 9922	.9836 7301	2 1/2
3	.9877 5937	.9853 2927	.9829 0516	.9804 8702	3
3 1/2	.9857 6831	.9829 4637	.9801 3252	.9773 2670	3 1/2
4	.9837 9084	.9805 8068	.9773 8098	.9741 9173	4
4 1/2	.9818 2679	.9782 3197	.9746 5032	.9710 8178	4 1/2
5	.9798 7601	.9759 0007	.9719 4027	.9679 9653	5
6	.9760 1364	.9712 8586	.9665 8098	.9618 9889	6
7	.9722 0256	.9667 3649	.9613 0115	.9558 9637	7
8	.9684 4160	.9622 5045	.9560 9888	.9499 8663	8
9	.9647 2965	.9578 2629	.9509 7232	.9441 6740	9
10	.9610 6563	.9534 6259	.9459 1969	.9384 3646	10

	9 mezes	10 mezes	11 mezes	12 mezes	
2	0.9852 5777	0.9836 3323	0.9820 1136	0.9803 9216	2
2 1/2	.9816 5097	.9796 3308	.9776 1935	.9756 6976	2 1/2
3	.9780 7483	.9756 6856	.9732 6822	.9708 7379	3
3 1/2	.9745 2893	.9717 3917	.9689 5739	.9661 8357	3 1/2
4	.9710 1289	.9678 4442	.9646 8629	.9615 3846	4
4 1/2	.9675 2630	.9639 8385	.9604 5437	.9569 3780	4 1/2
5	.9640 6880	.9601 5700	.9562 6107	.9523 8095	5
6	.9572 3948	.9526 0264	.9479 8825	.9433 9623	6
7	.9505 2198	.9451 7781	.9398 6369	.9345 7944	7
8	.9439 1347	.9378 7913	.9318 8336	.9259 2593	8
9	.9374 1117	.9307 0329	.9240 4342	.9174 3119	9
10	.9310 1244	.9236 4715	.9163 4013	.9090 9091	10

TABOA — III

Esta Taboa fornece a somma que a annuidade 1 collocada no principio de cada anno, attinge no fim do numero de annos indicado no mesmo alinhamento á esquerda (desde 1 até 100), com o juro composto á taxa indicada no alto da columna. A sua expressão (veja-se Secç. II § 1.º) é:

$$S_n = \frac{r^{n+1} - r}{t}.$$

TAXAS (6 DIVERSAS):

$5,\ 5^1/_2,\ 6,\ 6^1/_2,\ 6^2/_3,\ 7.$

Obtem-se os logarithmos das quantidades desta Taboa subtrahindo o logarithmo correspondente á taxa e numero de annos da Tab. VI, do producto do logarithmo de 1 com o seu juro á mesma taxa (fornecido pela Tab. VII) multiplicado pelo numero de annos mais um:

$$\log S_n = (n+1) . \log (1+t) - \log x.$$

Annos	5 %	5 ½ %	Annos	5 %	5 ½ %
1	1.0500 0000	1.0550 0000	51	231.8561 6526	275.1012 0672
2	2.1525 0000	2.1680 2500	52	244.4989 7352	291.2867 7309
3	3.3101 2500	3.3422 6637	53	257.7730 2220	308.3625 4561
4	4.5256 3125	4.5810 9103	54	271.7126 1831	326.3774 8562
5	5.8019 1281	5.8880 5103	55	286.3482 4922	345.3832 4733
6	7.1420 0845	7.2668 9384	56	301.7156 6168	365.4343 2593
7	8.5491 0888	8.7215 7300	57	317.8514 4477	386.5882 1386
8	10.0265 6432	10.2562 5951	58	334.7940 1700	408.9055 6562
9	11.5778 9254	11.8753 5379	59	352.5837 1785	432.4503 7173
10	13.2067 8716	13.5834 9825	60	371.2629 0375	457.2901 4217
11	14.9171 2652	15.3855 9065	61	390.8760 4893	483.4960 9999
12	16.7129 8285	17.2867 9814	62	411.4698 5138	511.1433 8549
13	18.5986 3199	19.2925 7203	63	433.0933 4395	540.3112 7170
14	20.5785 6359	21.4086 6350	64	455.7980 1115	571.0833 9164
15	22.6574 9177	23.6411 3999	65	479.6379 1170	603.5479 7818
16	24.8403 6636	25.9964 0269	66	504.6698 0729	637.7981 1698
17	27.1323 8467	28.4812 0483	67	530.9532 9765	673.9320 1341
18	29.5390 0391	31.1026 7110	68	558.5509 6254	712.0532 7415
19	32.0659 5410	33.8683 1801	69	587.5285 1066	752.2712 0423
20	34.7192 5181	36.7860 7550	70	617.9549 3620	794.7011 2046
21	37.5052 1440	39.8643 0965	71	649.9026 8301	839.4646 8209
22	40.4304 7512	43.1118 4069	72	683.4478 1716	886.6902 3960
23	43.5019 9887	46.5379 9825	73	718.6702 0802	936.5132 0278
24	46.7270 9882	50.1525 8816	74	755.6537 1842	989.0764 2893
25	50.1134 5376	53.9659 8051	75	794.4864 0434	1044.5306 3252
26	53.6691 2645	57.9891 0943	76	835.2607 2455	1103.0348 1731
27	57.4025 8277	62.2335 1045	77	878.0737 6078	1164.7567 3226
28	61.3227 1191	66.7113 5353	78	923.0274 4882	1229.8733 5254
29	65.4388 4750	71.4354 7797	79	970.2288 2126	1298.5713 8693
30	69.7607 8988	76.4194 2926	80	1019.7902 6232	1371.0478 1321
31	74.2988 2936	81.6774 9787	81	1071.8297 7544	1447.5104 4294
32	79.0637 7083	87.2247 6025	82	1126.4712 6421	1528.1785 1730
33	84.0669 5937	93.0771 2207	83	1183.8448 2742	1613.2833 3575
34	89.3203 0734	99.2513 6378	84	1244.0870 6879	1703.0689 1921
35	94.8363 2271	105.7651 8879	85	1307.3414 2223	1797.7927 0977
36	100.6281 3884	112.6372 7417	86	1373.7584 9335	1897.7263 0881
37	106.7095 4579	119.8873 2425	87	1443.4964 1801	2003.1562 5579
38	113.0950 2308	127.5361 2708	88	1516.7212 3891	2114.3848 4986
39	119.7997 7423	135.6056 1407	89	1593.6073 0086	2231.7310 1660
40	126.8397 6294	144.1189 2285	90	1674 3376 6590	2355.5312 2252
41	134.2317 5109	153.1004 6360	91	1759.1045 4920	2486.1404 3976
42	141.9933 3864	162.5759 8910	92	1848.1097 7666	2623.9331 6394
43	150.1430 0558	172.5726 6850	93	1941.5652 6549	2769.3044 8796
44	158.7001 5586	183.1191 6527	94	2039.6935 2876	2922 6712 3480
45	167.6851 6365	194.2457 1936	95	2142.7282 0520	3084.4731 5271
46	177.1194 2183	205.9842 3392	96	2250.9146 1546	3255.1741 7611
47	187.0253 9292	218.3683 6679	97	2364.5103 4623	3435.2637 5580
48	197.4266 6257	231.4336 2696	98	2483.7858 6355	3625.2582 6237
49	208.3479 9570	245.2174 7645	99	2609.0251 5672	3825.7024 6680
50	219.8153 9548	259.7594 3765	100	2740.5264 1456	4037.1711 0247

Annos	6 %	6 ½ %	Annos	6 %	6 ½ %
1	1.0600 0000	1.0650 0000	51	327.2814 2239	390.3079 6345
2	2.1836 0000	2.1992 2500	52	347.9783 0773	416.7429 8108
3	3.3746 1600	3.4071 7463	53	369.9170 0620	444.8962 7485
4	4.6370 9296	4.6936 4098	54	393.1720 2657	474.8795 3271
5	5.9753 1854	6.0637 2764	55	417.8223 4816	506.8117 0234
6	7.3938 3765	7.5228 6994	56	443.9516 8905	540.8194 6299
7	8.8974 6791	9.0768 5648	57	471.6487 9039	577.0377 2808
8	10.4913 1598	10.7318 5215	58	501.0077 1782	615 6102 8041
9	12.1807 9494	12.4944 2254	59	532.1281 8089	656.6898 4214
10	13.9716 4264	14.3715 6001	60	565.1158 7174	700.4396 8187
11	15.8699 4120	16.3707 1141	61	600.0828 2404	747.0332 6120
12	17.8821 3767	18.4998 0765	62	637.1477 9349	796.6554 2317
13	20.0150 6593	20.7672 9515	63	676.4366 6110	849.5030 2568
14	22.2759 6988	23.1821 6933	64	718.0828 6076	905.7857 2235
15	24.6725 2808	25.7540 1034	65	762.2278 3241	965.7267 9430
16	27.2128 7976	28.4930 2101	66	809.0215 0235	1029.5640 3593
17	29.9056 5255	31.4100 6738	67	858.6227 9249	1097.5506 9827
18	32.7599 9170	34.5167 2176	68	911.2001 6004	1169.9564 9365
19	35.7855 9120	37.8253 0867	69	966.9321 6964	1247.0686 6574
20	38.9927 2668	41.3489 5373	70	1026.0080 9982	1329.1931 2901
21	42.3922 9028	45.1016 3573	71	1088.6285 8581	1416.6556 8240
22	45.9958 2769	49.0982 4205	72	1155.0063 0096	1509.8033 0176
23	49.8155 7735	53.3546 2778	73	1225.3666 7901	1609.0055 1637
24	53.8645 1200	57.8876 7859	74	1299.9486 7976	1714.6558 7493
25	58.1563 8272	62.7153 7769	75	1379.0056 0055	1827.1735 0681
26	62.7057 6568	67.8568 7725	76	1462.8059 3658	1947.0047 8475
27	67.5281 1162	73.3325 7427	77	1551.6342 9277	2074 6250 9576
28	72.6397 9832	79.1641 9159	78	1645.7923 5034	2210.5407 2698
29	78.0581 8622	85.3748 6405	79	1745.5998 9136	2355.2908 7423
30	83.8016 7739	91.9892 3021	80	1851.3958 8484	2509.4497 8106
31	89.8897 7803	99.0335 3017	81	1963.5396 3793	2673.6290 1683
32	96.3431 6471	106.5357 0963	82	2082.4120 1621	2848 4799 0292
33	103.1837 5460	114.5255 3076	83	2208.4167 3718	3034.6960 9661
34	110.4347 7987	123.0346 9026	84	2341.9817 4141	3233.0163 4289
35	118.1208 6666	132.0969 4513	85	2483.5606 4589	3444.2274 0518
36	126.2681 1866	141.7482 4656	86	2633.6342 8465	3669.1671 8652
37	134.9042 0578	152.0268 8259	87	2792.7123 4173	3908.7280 5364
38	144.0584 5813	162.9736 2995	88	2961.3350 8223	4163.8603 7713
39	153.7619 6562	174.6319 1590	89	3140.0751 8716	4435.5763 0164
40	164.0476 8356	187.0479 9044	90	3329.5396 9839	4724.9537 6125
41	174.9505 4457	200.2711 0981	91	3530.3720 8030	5033.1407 5573
42	186.5075 7724	214.3537 3195	92	3743.2544 0512	5361.3599 0485
43	198.7580 3188	229.3517 2453	93	3968.9096 6942	5710.9132 9867
44	211.7435 1379	245.3245 8662	94	4208.1042 4959	6083.1876 6308
45	225.5081 2462	262.3356 8475	95	4461.6505 0456	6479.6598 6118
46	240.0986 1209	280.4525 0426	96	4730.4095 3484	6901.9027 5216
47	255.5645 2882	299.7469 1704	97	5015.2941 0693	7351.5914 3105
48	271.9584 0055	320.2954 6665	98	5317.2717 5334	7830.5098 7406
49	289.3359 0458	342.1796 7198	99	5637.3680 5854	8340.5580 1588
50	307.7560 5886	365.4863 5066	100	5976.6701 4205	8883.7592 8691

Annos	6 2/3 %	7 %	Annos	6 2/3 %	7 %
1	1.0666 6667	1.0700 0000	51	414.1152 9483	466.5049 7135
2	2.2044 4444	2.2149 0000	52	442.7896 4782	500.2303 1934
3	3.4180 7407	3.4399 4300	53	473.3756 2434	536.3164 4170
4	4.7126 1235	4.7507 3901	54	506.0006 6596	574.9285 9262
5	6.0934 5317	6.1532 9074	55	540.8007 1036	616.2435 9410
6	7.5663 5005	7.6540 2109	56	577.9207 5772	660.4506 4569
7	9.1374 4005	9.2598 0257	57	617.5154 7490	707.7521 9089
8	10.8132 6939	10.9779 8875	58	659.7498 3989	758.3648 4425
9	12.6008 2068	12.8164 4796	59	704.7998 2922	812.5203 8335
10	14.5075 4206	14.7835 9932	60	752.8531 5116	870.4668 1018
11	16.5413 7819	16.8884 5127	61	804.1100 2791	932.4694 8689
12	18.7108 0341	19.1406 4286	62	858.7840 2977	998.8123 5097
13	21.0248 5697	21.5504 8786	63	917.1029 6509	1069.7992 1554
14	23.4931 8077	24.1290 2201	64	979.3098 2942	1145.7551 6063
15	26.1260 5948	26.8880 5355	65	1045.6638 1805	1227.0280 2187
16	28.9344 6345	29.8402 1730	66	1116.4414 0592	1313.9899 8341
17	31.9300 9435	32.9990 3251	67	1191.9374 9965	1407.0392 8224
18	35.1254 3397	36.3789 6479	68	1272.4666 6629	1506.6020 3200
19	38.5337 9623	39.9954 9232	69	1358.3644 4405	1613.1341 7424
20	42.1693 8265	43.8651 7678	70	1449.9887 4032	1727.1235 6644
21	46.0473 4149	48.0057 3916	71	1547.7213 2301	1849.0922 1609
22	50.1838 3093	52.4361 4090	72	1651.9694 1121	1979.5986 7122
23	54.5960 8632	57.1766 7076	73	1763.1673 7195	2119.2405 7820
24	59.3024 9207	62.2490 3772	74	1881.7785 3008	2268.6574 1867
25	64.3226 5821	67.6764 7036	75	2008.2970 9876	2428.5334 3798
26	69.6775 0209	73.4838 2328	76	2143.2502 3867	2599.6007 7864
27	75.3893 3557	79.6976 9091	77	2287.2002 5458	2782.6428 3315
28	81.4819 5794	86.3465 2927	78	2440.7469 3822	2978.4978 3147
29	87.9807 5513	93.4607 8632	79	2604.5300 6744	3188.0626 7967
30	94.9128 0548	101.0730 4137	80	2779.2320 7193	3412.2970 6724
31	102.3069 9251	109.2181 5426	81	2965.5808 7673	3652.2278 6195
32	110.1941 2534	117.9334 2506	82	3164.3529 3518	3908.9538 1229
33	118.6070 6703	127.2587 6481	83	3376.3764 6419	4183.6505 7915
34	127.5808 7150	137.2368 7835	84	3602.5348 9514	4477.5761 1969
35	137.1529 2960	147.9134 5984	85	3843.7705 5481	4792.0764 4807
36	147.3631 2491	159.3374 0202	86	4101.0885 9180	5128.5917 9943
37	158.2539 9990	171.5610 2017	87	4375.5611 6458	5488.6632 2539
38	169.8709 3323	184.6402 9158	88	4668.3319 0889	5873.9396 5117
39	182.2623 2878	198.6351 1199	89	4980.6207 0282	6286.1854 2675
40	195.4798 1736	213.6095 6983	90	5313.7287 4967	6727.2884 0662
41	209.5784 7185	229.6322 3971	91	5669.0439 9965	7199.2685 9509
42	224.6170 3664	246.7764 9649	92	6048.0469 3296	7704.2873 9674
43	240.6581 7242	265.1208 5125	93	6452.3167 2849	8244.6575 1452
44	257.7687 1725	284.7493 1084	94	6883.5378 4372	8822.8535 4053
45	276.0199 6506	305.7517 6260	95	7343.5070 3330	9441.5232 8837
46	295.4879 6273	328.2243 8598	96	7834.1408 3552	10103.4999 1856
47	316.2538 2691	352.2700 9300	97	8357.4835 5789	10811.8149 1285
48	338.4140 8204	377.9989 9950	98	8915.7157 9509	11569.7119 5676
49	362.0310 2085	405.5289 2947	99	9511.1635 1476	12380.6617 9373
50	387.2330 8890	434.9859 5453	100	10146.3077 4908	13248.3781 1929

TABOA — IV

Esta Taboa fornece a somma da *Renda* 1, paga no fim de cada anno pelo numero de annos indicado no mesmo alinhamento á esquerda (desde 1 até 100), com o juro composto á taxa indicada no alto da columna. A sua expressão (veja-se Secç. II § 2º) é:

$$\Sigma_n = \frac{r^n - 1}{i}.$$

TAXAS (16 DIVERSAS):

2, $2^1/_2$, 3, $3^1/_2$, 4, $4^1/_2$,
5, $5^1/_2$, 6, $6^1/_2$, 7, $7^1/_2$,
8, $8^1/_2$, 9, 10.

Obtem-se os logarithmos das quantidades desta Taboa, subtrahindo o logarithmo correspondente á taxa e numero de annos da Tab. VI, do producto do logarithmo de 1 mais o seu juro á mesma taxa (fornecido pela Tab. VII) multiplicado pelo numero de annos:

$$\log \Sigma_n = n \cdot \log (1+i) - \log \alpha.$$

Annos	2 %	2 1/2 %	Annos	2 %	2 1/2 %
1	1.0000 0000	1.0000 0000	51	87.2709 8948	100.9214 5751
2	2.0200 0000	2.0250 0000	52	90.0164 0927	104.4444 9395
3	3.0604 0000	3.0756 2500	53	92.8167 3745	108.0556 0629
4	4.1216 0800	4.1525 1562	54	95.6730 7220	111.7569 9645
5	5.2040 4016	5.2563 2852	55	98.5865 3365	115.5509 2136
6	6.3081 2096	6.3877 3673	56	101.5582 6432	119.4396 9440
7	7.4342 8338	7.5474 3015	57	104.5894 2961	123.4256 8676
8	8.5829 6905	8.7361 1590	58	107.6812 1820	127.5113 2893
9	9.7546 2843	9.9545 1880	59	110.8348 4256	131.6991 1215
10	10.9497 2100	11.2033 8177	60	114.0515 3941	135.9915 8995
11	12.1687 1542	12.4834 6631	61	117.3325 7020	140.3913 7970
12	13.4120 8973	13.7955 5297	62	120.6792 2160	144.9011 6419
13	14.6803 3152	15.1404 4179	63	124.0928 0604	149.5236 9330
14	15.9739 3815	16.5189 5284	64	127.5746 6216	154.2617 8563
15	17.2934 1692	17.9319 2666	65	131.1261 5540	159.1183 3027
16	18.6392 8525	19.3802 2483	66	134.7486 7851	164.0962 8853
17	20.0120 7096	20.8647 3045	67	138.4436 5208	169.1986 9574
18	21.4123 1238	22.3863 4871	68	142.2125 2512	174.4286 6313
19	22.8405 5863	23.9460 0743	69	146.0567 7562	179.7893 7971
20	24.2973 6980	25.5446 5761	70	149.9779 1113	185.2841 1421
21	25.7833 1719	27.1832 7405	71	153.9774 6936	190.9162 1706
22	27.2989 8354	28.8628 5590	72	158.0570 1874	196.6891 2247
23	28.8449 6321	30.5844 2730	73	162.2181 5912	202.6063 5055
24	30.4218 6247	32.3490 3798	74	166.4625 2230	208.6715 0931
25	32.0302 9972	34.1577 6393	75	170.7917 7275	214.8882 9705
26	33.6709 0572	36.0117 0803	76	175.2076 0820	221.2605 0447
27	35.3443 2383	37.9120 0073	77	179.7117 6037	227.7920 1708
28	37.0512 1031	39.8598 0075	78	184.3059 9557	234.4868 1751
29	38.7922 3451	41.8562 9577	79	188.9921 1548	241.3489 8795
30	40.5680 7920	43.9027 0316	80	193.7719 5779	248.3827 1265
31	42.3794 4079	46.0002 7074	81	198.6473 9695	255.5922 8046
32	44.2270 2960	48.1502 7751	82	203.6203 4489	262.9820 8748
33	46.1115 7020	50.3540 3445	83	208.6927 5179	270.5566 3966
34	48.0338 0160	52.6128 8531	84	213.8665 0682	278.3205 5565
35	49.9944 7763	54.9282 0744	85	219.1439 3896	286.2785 6954
36	51.9943 6718	57.3014 1263	86	224.5268 1774	294.4355 3378
37	54.0342 5453	59.7339 4794	87	230.0173 5409	302.7964 2213
38	56.1149 3962	62.2272 9664	88	235.6177 0117	311.3663 3268
39	58.2372 3841	64.7829 7906	89	241.3300 5520	320.1504 9100
40	60.4019 8318	67.4025 5354	90	247.1566 5630	329.1542 5327
41	62.6100 2284	70.0876 1737	91	253.0997 8943	338.3831 0961
42	64.8622 2330	72.8398 0781	92	259.1617 8522	347.8426 8735
43	67.1594 6776	75.6608 0300	93	265.3450 2092	357.5387 5453
44	69.5026 5712	78.5523 2308	94	271.6519 2134	367.4772 2339
45	71.8927 1026	81.5161 3116	95	278.0849 5976	377.6641 5398
46	74.3305 6447	84.5540 3443	96	284.6466 5896	388.1057 5783
47	76.8171 7576	87.6678 8529	97	291.3395 9214	398.8084 0177
48	79.3535 1927	90.8595 8243	98	298.1663 8398	409.7786 1182
49	81.9405 8966	94.1310 7199	99	305.1297 1166	421.0230 7711
50	84.5794 0145	97.4843 4879	100	312.2323 0589	432.5486 5404

Annos	3 %	3 1/2 %	Annos	3 %	3 1/2 %
1	1.0000 0000	1.0000 0000	51	117.1807 7331	136.5828 3702
2	2.0300 0000	2.0350 0000	52	121.6961 9651	142.3632 3631
3	3.0909 0000	3.1062 2500	53	126.3470 8240	148.3459 4958
4	4.1836 2700	4.2149 4287	54	131.1374 9488	154.5380 5782
5	5.3091 3581	5.3624 6588	55	136.0716 1972	160.9468 8984
6	6.4684 0988	6.5501 5218	56	141.1537 6831	167.5800 3099
7	7.6624 6218	7.7794 0751	57	146.3883 8136	174.4453 3207
8	8.8923 3605	9.0516 8677	58	151.7800 3280	181.5509 1869
9	10.1591 0613	10.3684 9581	59	157.3334 3379	188.9052 0085
10	11.4638 7931	11.7313 9316	60	163.0534 3630	196.5168 8288
11	12.8077 9569	13.1419 9192	61	168.9450 3991	204.3949 7378
12	14.1920 2956	14.6019 6164	62	175.0133 9110	212.5487 9786
13	15.6177 9045	16.1130 3030	63	181.2637 9284	220.9880 0579
14	17.0863 2416	17.6769 8636	64	187.7017 0662	229.7225 8599
15	18.5989 1389	19.2956 8088	65	194.3327 5782	238.7628 7650
16	20.1568 8130	20.9710 2971	66	201.1627 4055	248.1195 7718
17	21.7615 8774	22.7050 1575	67	208.1976 2277	257.8037 6238
18	23.4144 3537	24.4996 9130	68	215.4435 5145	267.8268 9406
19	25.1168 6844	26.3571 8050	69	222.9068 5800	278.2008 3535
20	26.8703 7449	28.2796 8181	70	230.5940 6374	288.9378 6459
21	28.6764 8572	30.2694 7068	71	238.5118 8565	300.0506 8985
22	30.5367 8030	32.3289 0215	72	246.6672 4222	311.5524 6399
23	32.4528 8370	34.4604 1373	73	255.0672 5948	323.4568 0023
24	34.4264 7022	36.6665 2821	74	263.7192 7727	335.7777 8824
25	36.4592 6432	38.9498 5669	75	272.6308 5559	348.5300 1083
26	38.5530 4225	41.3131 0168	76	281.8097 8126	361.7285 6121
27	40.7096 3352	43.7590 6024	77	291.2640 7469	375.3890 6085
28	42.9309 2252	46.2906 2734	78	301.0019 9693	389.5276 7798
29	45.2188 5020	48.9107 9930	79	311.0320 5684	404.1611 4671
30	47.5754 1571	51.6226 7728	80	321.3630 1855	419.3067 8685
31	50.0026 7818	54.4294 7098	81	332.0039 0910	434.9825 2439
32	52.5027 5852	57.3345 0247	82	342.9640 2638	451.2069 1274
33	55.0778 4128	60.3412 1005	83	354.2529 4717	467.9991 5469
34	57.7301 7652	63.4531 5240	84	365.8805 3558	485.3791 2510
35	60.4620 8181	66.6740 1274	85	377.8569 5165	503.3673 9448
36	63.2759 4427	70.0076 0318	86	390.1926 6020	521.9852 5328
37	66.1742 2259	73.4578 6930	87	402.8984 4001	541.2547 3715
38	69.1594 4927	77.0288 9472	88	415.9853 9321	561.1986 5295
39	72.2342 3275	80.7249 0604	89	429.4649 5500	581.8406 0580
40	75.4012 5973	84.5502 7775	90	443.3489 0365	603.2050 2701
41	78.6632 9753	88.5095 3747	91	457.6493 7076	625.3172 0295
42	82.0231 9645	92.6073 7128	92	472.3788 5188	648 2033 0505
43	85.4838 9234	96.8486 2928	93	487.5502 1744	671.8904 2073
44	89.0484 0911	101.2383 3130	94	503.1767 2396	696.4065 8546
45	92.7198 6139	105.7816 7290	95	519.2720 2568	721.7808 1595
46	96.5014 5723	110.4840 3145	96	535.8501 8645	748.0431 4451
47	100.3965 0095	115.3509 7255	97	552.9256 9205	775.2246 5456
48	104.4083 9598	120.3882 5659	98	570.5134 6281	803.3575 1747
49	108.5406 4785	125.6018 4557	99	588.6288 6669	832.4750 3059
50	112.7968 6729	130.9979 1016	100	607.2877 3269	862.6116 5666

Annos	4 %	4 1/2 %	Annos	4 %	4 1/2 %
1	1.0000 0000	1.0000 0000	51	159.7737 6700	187.5356 6455
2	2.0400 0000	2.0450 0000	52	167.1647 1768	196.9747 6946
3	3.1216 0000	3.1370 2500	53	174.8513 0639	206.8386 3408
4	4.2464 6400	4.2781 9112	54	182.8453 5865	217.1463 7261
5	5.4163 2256	5.4707 0973	55	191.1591 7299	227.9179 5938
6	6.6329 7546	6.7168 9166	56	199.8055 3991	239.1742 6755
7	7.8982 9448	8.0191 5179	57	208.7977 6151	250.9371 0959
8	9.2142 2626	9.3800 1362	58	218.1496 7197	263.2292 7953
9	10.5827 9531	10.8021 1423	59	227.8756 5885	276.0745 9710
10	12.0061 0712	12.2882 0937	60	237.9906 8520	289.4979 5397
11	13.4863 5141	13.8411 7879	61	248.5103 1261	303.5253 6190
12	15.0258 0546	15.4640 3184	62	259.4507 2511	318.1840 0319
13	16.6268 3768	17.1599 1327	63	270.8287 5412	333.5022 8333
14	18.2919 1119	18.9321 0937	64	282.6619 0428	349.5098 8608
15	20.0235 8764	20.7840 5429	65	294.9683 8045	366.2378 3096
16	21.8245 3114	22.7193 3673	66	307.7671 1567	383.7185 3335
17	23.6975 1239	24.7417 0689	67	321.0778 0030	401.9858 6735
18	25.6454 1288	26.8550 8370	68	334.9209 1231	421.0752 3138
19	27.6712 2940	29.0635 6246	69	349.3177 4880	441.0236 1679
20	29.7780 7858	31.3714 2277	70	364.2904 5876	461.8696 7955
21	31.9692 0172	33.7831 3680	71	379.8620 7711	483.6538 1513
22	34.2479 6979	36.3033 7795	72	396.0565 6019	506.4182 3681
23	36.6178 8858	38.9370 2996	73	412.8988 2260	530.2070 5746
24	39.0826 0412	41.6891 9631	74	430.4147 7550	555.0663 7505
25	41.6459 0829	44.5652 1014	75	448.6313 6652	581.0443 6193
26	44.3117 4462	47.5706 4460	76	467.5766 2118	608.1913 5821
27	47.0842 1440	50.7113 2361	77	487.2796 8603	636.5599 6933
28	49.9675 8298	53.9933 3317	78	507.7708 7347	666.2051 6795
29	52.9662 8630	57.4230 3316	79	529.0817 0841	697.1844 0051
30	56.0849 3775	61.0070 6966	80	551.2449 7675	729.5576 9853
31	59.3283 3526	64.7523 8779	81	574.2947 7582	763.3877 9497
32	62.7014 6867	68.6662 4524	82	598.2665 6685	798.7402 4574
33	66.2095 2742	72.7562 2628	83	623.1972 2952	835.6835 5680
34	69.8579 0851	77.0302 5646	84	649.1251 1870	874.2893 1686
35	73.6522 2486	81.4966 1800	85	676.0901 2345	914.6323 3611
36	77.5983 1385	86.1639 6581	86	704.1337 2839	956.7907 9124
37	81.7022 4640	91.0413 4427	87	733.2990 7753	1000.8463 7685
38	85.9703 3626	96.1382 0476	88	763.6310 4063	1046.8844 6380
39	90.4091 4971	101.4644 2398	89	795.1762 8225	1094.9942 6467
40	95.0255 1570	107.0303 2306	90	827.9833 3354	1145.2690 0658
41	99.8265 3633	112.8466 8759	91	862.1026 6688	1197.8061 1188
42	104.8195 9778	118.9247 8854	92	897.5867 7356	1252.7073 8692
43	110.0123 8169	125.2764 0402	93	934.4902 4450	1310.0792 1933
44	115 4128 7696	131.9138 4220	94	972.8698 5428	1370.0327 8420
45	121.0293 9204	138.8499 6510	95	1012.7846 4845	1432.6842 5949
46	126.8705 6772	146.0982 1353	96	1054.2960 3439	1498.1550 5116
47	132.9453 9043	153.6726 3314	97	1097.4678 7577	1566.5720 2846
48	139.2632 0604	161.5879 0163	98	1142.3665 9080	1638.0677 6974
49	145.8337 3429	169.8593 5720	99	1189.0612 5443	1712.7808 1938
50	152.6670 8366	178.5030 2828	100	1237.6237 0461	1790.8559 5626

Annos	5 %	5 1/2 %	Annos	5 %	5 1/2 %
1	1.0000 0000	1.0000 0000	51	220.8153 9548	260.7594 3765
2	2.0500 0000	2.0550 0000	52	232.8561 6526	276.1012 0672
3	3.1525 0000	3.1680 2500	53	245.4989 7352	292.2867 7309
4	4.3101 2500	4.3422 6637	54	258.7739 2220	309.3625 4561
5	5.5256 3125	5.5810 9103	55	272.7126 1831	327.3774 8562
6	6.8019 1281	6.8880 5103	56	287.3482 4922	346.3832 4733
7	8.1420 0845	8.2668 9384	57	302.7156 6168	366.4343 2593
8	9.5491 0888	9.7215 7300	58	318.8514 4477	387.5882 1386
9	11.0265 6432	11.2562 5951	59	335.7940 1700	409.9055 6562
10	12.5778 9254	12.8753 5379	60	353.5837 1785	433.4503 7173
11	14.2067 8716	14.5834 9825	61	372.2629 0375	458.2901 4217
12	15.9171 2652	16.3855 9065	62	391.8760 4893	484.4960 9999
13	17.7129 8285	18.2867 9814	63	412.4698 5138	512.1433 8549
14	19.5986 3199	20.2925 7203	64	434.0933 4395	541.3112 7170
15	21.5785 6359	22.4086 6350	65	456.7980 1115	572.0833 9164
16	23.6574 9177	24.6411 3999	66	480.6379 1170	604.5479 7818
17	25.8403 6636	26.9964 0269	67	505.6698 0729	638.7981 1698
18	28.1323 8467	29.4812 0483	68	531.9532 9765	674.9320 1341
19	30.5390 0391	32.1026 7110	69	559.5509 6254	713.0532 7415
20	33.0659 5410	34.8683 1801	70	588.5285 1066	753.2712 0423
21	35.7192 5181	37.7860 7550	71	618.9549 3620	795.7011 2046
22	38.5052 1440	40.8643 0965	72	650.9026 8301	840.4646 8209
23	41.4304 7512	44.1118 4669	73	684.4478 1716	887.6902 3960
24	44.5019 9887	47.5379 9825	74	719.6702 0802	937.5132 0278
25	47.7270 9882	51.1525 8816	75	756.6537 1842	990.0764 2893
26	51.1134 5376	54.9659 8051	76	795.4864 0434	1045.5306 3252
27	54.6691 2645	58.9891 0943	77	836.2607 2455	1104.0348 1731
28	58.4025 8277	63.2335 1045	78	879.0737 6078	1165.7567 3226
29	62.3227 1191	67.7113 5353	79	924.0274 4882	1230.8733 5254
30	66.4388 4750	72.4354 7797	80	971.2288 2126	1299.5713 8693
31	70.7607 8988	77.4194 2926	81	1020.7902 6232	1372.0478 1321
32	75.2988 2936	82.6774 9787	82	1072.8297 7544	1448.5104 4294
33	80.0637 7083	88.2247 6025	83	1127.4712 6421	1529.1785 1730
34	85.0669 5937	94.0771 2207	84	1184.8448 2742	1614.2833 3575
35	90.3203 0734	100.2513 6378	85	1245.0870 6879	1704.0689 1921
36	95.8363 2271	106.7651 8879	86	1308.3414 2223	1798.7927 0977
37	101.6281 3884	113.6372 7417	87	1374.7584 9335	1898.7263 0881
38	107.7095 4579	120.8873 2425	88	1444.4964 1801	2004.1562 5579
39	114.0950 2308	128.5361 2708	89	1517.7212 3891	2115.3848 4986
40	120.7997 7423	136.6056 1407	90	1594.6073 0086	2232.7310 1660
41	127.8397 6294	145.1189 2285	91	1675.3376 6590	2356.5312 2252
42	135.2317 5109	154.1004 6360	92	1760.1045 4920	2487.1404 3976
43	142.9933 3864	163.5759 8910	93	1849.1097 7666	2624.9331 6394
44	151.1430 0558	173.5726 6850	94	1942.5652 6549	2770.3044 8796
45	159.7001 5586	184.1191 6527	95	2040.6935 2876	2923.6712 3480
46	168.6851 6365	195.2457 1936	96	2143.7282 0520	3085.4731 5271
47	178.1194 2183	206.9842 3392	97	2251.9146 1546	3256.1741 7611
48	188.0253 9292	219.3683 6679	98	2365.5103 4623	3436.2637 5580
49	198.4266 6257	232.4336 2696	99	2484.7858 6355	3626.2582 6237
50	209.3479 9570	246.2174 7645	100	2610.0251 5672	3826.7024 6680

Annos	6 %	6 1/2 %	Annos	6 %	6 1/2 %
1	1.0000 0000	1.0000 0000	51	308.7560 5886	366.4863 5065
2	2.0600 0000	2.0650 0000	52	328.2814 2239	391.3079 6345
3	3.1836 0000	3.1992 2500	53	348.9783 0773	417.7429 8108
4	4.3746 1600	4.4071 7463	54	370.9170 0620	445.8962 7485
5	5.6370 9296	5.6936 4098	55	394.1720 2657	475.8795 3271
6	6.9753 1854	7.0637 2764	56	418.8223 4816	507.8117 0234
7	8.3938 3765	8.5228 6994	57	444.9516 8905	541.8194 6299
8	9.8974 6791	10.0768 5648	58	472.6487 9039	578.0377 2808
9	11.4913 1598	11.7318 5215	59	502.0077 1782	616.6102 8041
10	13.1807 9494	13.4944 2254	60	533.1281 8089	657.6898 4214
11	14.9716 4264	15.3715 6001	61	566.1158 7174	701.4396 8187
12	16.8699 4120	17.3707 1141	62	601.0828 2404	748.0332 6120
13	18.8821 3767	19.4998 0765	63	638.1477 9349	797.6554 2317
14	21.0150 6593	21.7672 9515	64	677.4366 6110	850.5030 2568
15	23.2759 6988	24.1821 6933	65	719.0828 6076	906.7857 2235
16	25.6725 2808	26.7540 1034	66	763.2278 3241	966.7267 9430
17	28.2128 7976	29.4930 2101	67	810.0215 0235	1030.5640 3593
18	30.9056 5255	32.4100 6738	68	859.6227 9249	1098.5506 9827
19	33.7599 9170	35.5167 2176	69	912.2001 6004	1170.9564 9365
20	36.7855 9120	38.8253 0867	70	967.9321 6964	1248.0686 6574
21	39.9927 2668	42.3489 5373	71	1027.0080 9982	1330.1931 2901
22	43.3922 9028	46.1016 3573	72	1089.6285 8581	1417.6556 8240
23	46.9958 2769	50.0982 4205	73	1156.0063 0096	1510.8033 0176
24	50.8155 7735	54.3546 2778	74	1226.3666 7901	1610.0055 1637
25	54.8645 1200	58.8876 7859	75	1300.9486 7976	1715.6558 7493
26	59.1563 8272	63.7153 7769	76	1380.0056 0055	1828.1735 0681
27	63.7057 6568	68.8568 7725	77	1463.8059 3658	1948.0047 8475
28	68.5281 1162	74.3325 7427	78	1552.6342 9277	2075.6250 9576
29	73.6397 9832	80.1641 9159	79	1646.7923 5034	2211.5407 2698
30	79.0581 8622	86.3748 6405	80	1746.5998 9136	2356.2908 7423
31	84.8016 7739	92.9892 3021	81	1852.3958 8484	2510.4497 8106
32	90.8897 7803	100.0335 3017	82	1964.5396 3793	2674.6290 1683
33	97.3431 6471	107 5357 0963	83	2083.4120 1621	2849.4799 0292
34	104.1837 5460	115.5255 3076	84	2209.4167 3718	3035.6960 9661
35	111.4347 7987	124.0346 9026	85	2342.9817 4141	3234.0163 4289
36	119.1208 6666	133.0969 4513	86	2484.5606 4589	3445.2274 0518
37	127.2681 1866	142.7482 4656	87	2634.6342 8465	3670.1671 8652
38	135.9042 0578	153.0268 8259	88	2793.7123 4173	3909.7280 5364
39	145.0584 5813	163.9736 2995	89	2962.3350 8223	4164.8603 7713
40	154.7619 6562	175.6319 1590	90	3141.0751 8716	4436.5763 0164
41	165 0476 8356	188.0479 9044	91	3330.5396 9839	4725.9537 6125
42	175 9505 4457	201.2711 0981	92	3531.3720 8030	5034.1407 5573
43	187 5075 7724	215.3537 3195	93	3744.2544 0512	5362.3599 0485
44	199 7580 3188	230.3517 2453	94	3969.9096 6942	5711.9132 9867
45	212 7435 1379	246.3245 8662	95	4209.1042 4959	6084.1876 6308
46	226 5081 2462	263.3356 8475	96	4462.6505 0456	6480.6598 6118
47	241 0986 1209	281.4525 0426	97	4731.4095 3484	6902.9027 5216
48	256 5645 2882	300.7469 1704	98	5016.2941 0693	7352.5914 3105
49	272 9584 0055	321.2954 6665	99	5318.2717 5334	7831.5098 7406
50	290 3359 0458	343.1796 7198	100	5638.3680 5854	8341.5580 1588

Annos	7 %	7 1/2 %	Annos	7 %	7 1/2 %
1	1.0000 0000	1.0000 0000	51	435.9859 5453	519.7196 9313
2	2.0700 0000	2.0750 0000	52	467.5049 7135	559.6986 7011
3	3.2149 0000	3.2306 2500	53	501.2303 1934	602.6760 7037
4	4.4399 4300	4 4729 2188	54	537.3164 4170	648.8767 7565
5	5.7507 3901	5.8083 9102	55	575.9285 9262	698.5425 3382
6	7.1532 9074	7.2440 2034	56	617.2435 9410	751.9332 2386
7	8.6540 2109	8.7873 2187	57	661.4506 4569	809.3282 1564
8	10.2598 0257	10.4463 7101	58	708.7521 9089	871.0278 3182
9	11.9779 8875	12.2298 4883	59	759.3648 4425	937.3549 1920
10	13.8164 4796	14.1470 8750	60	813.5203 8335	1008.6565 3814
11	15.7835 9932	16.2081 1906	61	871.4668 1018	1085.3057 7851
12	17.8884 5127	18.4237 2799	62	933.4694 8689	1167.7037 1189
13	20.1406 4286	20.8055 0759	63	999.8123 5097	1256.2814 9029
14	22.5504 8786	23.3659 2065	64	1070.7992 1554	1351.5026 0206
15	25.1290 2201	26.1183 6470	65	1146.7551 6063	1453.8652 9721
16	27.8880 5355	29.0772 4206	66	1228.0280 2187	1563.9051 9450
17	30.8402 1730	32.2580 3521	67	1314.9899 8341	1682.1980 8409
18	33.9990 3251	35.6773 8785	68	1408.0392 8224	1809.3629 4040
19	37.3789 6479	39.3531 9194	69	1507.6020 3200	1946.0651 6093
20	40.9954 9232	43.3046 8134	70	1614.1341 7424	2093.0200 4800
21	44.8651 7678	47.5525 3244	71	1728.1235 6644	2250.9965 5160
22	49.0057 3916	52.1189 7237	72	1850.0922 1609	2420.8212 9296
23	53.4361 4090	57.0278 9530	73	1980.5986 7122	2603.3828 8994
24	58.1766 7076	62.3049 8744	74	2120.2405 7820	2799.6366 0668
25	63.2490 3772	67.9778 6150	75	2269.6574 1867	3010.6093 5218
26	68 6764 7036	74.0762 0112	76	2429.5334 3798	3237.4050 5360
27	74.4838 2328	80.6319 1620	77	2600.6007 7864	3481.2104 3262
28	80.6976 9091	87.6793 0991	78	2783.6428 3315	3743.3012 1506
29	87.3465 2927	95.2552 5816	79	2979.4978 3147	4025.0488 0619
30	94.4607 8632	103.3994 0252	80	3189.0626 7967	4327.9274 6366
31	102.0730 4137	112.1543 5771	81	3413.2970 6724	4653.5220 2666
32	110.2181 5426	121.5659 3454	82	3653.2278 6195	5003.5361 7866
33	118.9334 2506	131.6833 7963	83	3909.9538 1229	5379.8013 9206
34	128.2587 6481	142.5596 3310	84	4184.6505 7915	5784.2864 9646
35	138.2368 7835	154.2516 0558	85	4478.5761 1969	6219.1079 8369
36	148.9134 5984	166.8204 7600	86	4793.0764 4807	6686.5410 8247
37	160.3374 0202	180.3320 1170	87	5129.5917 9943	7189.0316 6366
38	172.5610 2017	194.8569 1258	88	5489.6632 2539	7729.2090 3843
39	185.6402 9158	210.4711 8102	89	5874.9396 5117	8309.8997 1631
40	199.6351 1199	227.2565 1960	90	6287.1854 2675	8934.1421 9504
41	214.6095 6983	245.3007 5857	91	6728.2884 0662	9605.2028 5966
42	230.6322 3971	264.6983 1546	92	7200.2685 9509	10326.5930 7414
43	247.7764 9649	285.5506 8912	93	7705.2873 9674	11102.0875 5470
44	266.1208 5125	307.9669 9080	94	8245.6575 1452	11935.7441 2130
45	285.7493 1084	332.0645 1511	95	8823.8535 4053	12831.9249 3040
46	306.7517 6260	357.9693 5375	96	9442.5232 8837	13795.3193 0018
47	329.2243 8598	385.8170 5528	97	10104.4999 1856	14830.9682 4769
48	353.2700 9300	415.7533 3442	98	10812.8149 1285	15944.2908 6627
49	378.9989 9950	447.9348 3451	99	11570.7119 5676	17141.1126 8124
50	406.5289 2947	482.5299 4709	100	12381.6617 9373	18427.6961 3233

Annos	8 %	8 ½ %	Annos	8 %	8 ½ %
1	1.0000 0000	1.0000 0000	51	620.6717 6892	742.4547 3333
2	2.0800 0000	2.0850 0000	52	671.3255 1044	806.5633 8566
3	3.2464 0000	3.2622 2500	53	726.0315 5127	876.1212 7345
4	4.5061 1200	4.5395 1413	54	785.1140 7538	951.5915 8169
5	5.8666 0096	5.9253 7283	55	848.9233 0141	1033.4768 6613
6	7.3359 2904	7.4290 2952	56	917.8370 5752	1122.3223 9975
7	8.9228 0336	9.0604 9702	57	992.2640 2212	1218.7198 0373
8	10.6366 2763	10.8306 3927	58	1072.6451 4389	1323.3109 8705
9	12.4875 5784	12.7512 4361	59	1159.4567 5540	1436.7924 2095
10	14.4865 6247	14.8350 9932	60	1253.2132 9583	1559.9197 7673
11	16.6454 8746	17.0960 8276	61	1354.4703 5950	1693.5129 5775
12	18.9771 2646	19.5492 4979	62	1463.8279 8826	1838.4615 5916
13	21.4952 9658	22.2109 3603	63	1581.9342 2732	1995.7307 9169
14	24.2149 2030	25.0988 6559	64	1709.4889 6550	2166.3679 0898
15	27.1521 1393	28.2322 6916	65	1847.2480 8274	2351.5091 8125
16	30.3242 8304	31.6320 1204	66	1996.0279 2936	2552.3874 6165
17	33.7502 2568	35.3207 3306	67	2156.7101 6371	2770.3403 9589
18	37.4502 4374	39.3229 9538	68	2330.2469 7681	3006.8193 2954
19	41.4462 6324	43.6654 4998	69	2517.6667 3496	3263.3989 7255
20	45.7619 6430	48.3770 1323	70	2720.0800 7375	3541.7878 8522
21	50.4229 2144	53.4890 5936	71	2938.6864 7965	3843.8398 5546
22	55.4567 5516	59.0356 2940	72	3174.7813 9802	4171.5662 4318
23	60.8932 9557	65.0536 5790	73	3429.7639 0987	4527.1493 7385
24	66.7647 5922	71.5832 1882	74	3705.1450 2266	4912.9570 7063
25	73.1059 3995	78.6677 9242	75	4002.5566 2447	5331.5584 2163
26	79.9544 1515	86.3545 5478	76	4323 7611 5442	5785.7408 8747
27	87.3507 6836	94.6946 9193	77	4670.6620 4678	6278.5288 6290
28	95.3388 2983	103.7437 4075	78	5045.3150 1052	6813.2038 1625
29	103.9659 3622	113.5619 5871	79	5449.9402 1136	7393.3261 4063
30	113.2832 1111	124.2147 2520	80	5886.9354 2827	8022.7588 6259
31	123.3458 6800	135.7729 7684	81	6358.8902 6253	8705.6933 6591
32	134.2135 3744	148.3136 7987	82	6868.6014 8354	9446.6773 0201
33	145.9506 2044	161.9203 4266	83	7419.0896 0222	10250.6448 7268
34	158.6266 7007	176.6835 7179	84	8013.6167 7040	11122.9496 8686
35	172.3168 0368	192.7016 7539	85	8655.7061 1203	12069.4004 1024
36	187.1021 4797	210.0813 1780	86	9349.1626 0099	13096.2994 4511
37	203.0703 9981	228.9382 2981	87	10098.0956 0907	14210.4848 9794
38	220.3159 4540	249.3979 7935	88	10906.9432 5780	15419.3761 1427
39	238.9412 2103	271.5968 0759	89	11780.4987 1842	16731.0230 8398
40	259.0565 1871	295.6825 3624	90	12723.9386 1589	18154.1600 4612
41	280.7810 4021	321.8155 5182	91	13742.8537 0516	19698.2636 5004
42	304.2435 2342	350.1698 7372	92	14843.2820 0158	21373.6160 6029
43	329.5830 0530	380.9343 1299	93	16031.7445 6170	23191.3734 2542
44	356.9496 4572	414.3137 2959	94	17315.2841 2664	25163.6401 6658
45	386.5056 1738	450.5303 9661	95	18701.5068 5677	27303.5495 8074
46	418.4260 6677	489.8254 8032	96	20198.6274 0531	29625.3512 9510
47	452.9001 5211	532.4606 4615	97	21815.5175 9774	32144.5061 5518
48	490.1321 6428	578.7198 0107	98	23561.7590 0555	34877.7891 7837
49	530.3427 3742	628.9109 8416	99	25447.6997 2600	37843.4012 5853
50	573.7701 5641	683.3684 1782	100	27484.5157 0408	41061.0903 6551

Annos	9 %	10 %	Annos	9 %	10 %
1	1.0000 0000	1.0000 0000	51	889.4410 7647	1281.2993 8168
2	2.0900 0000	2.1000 0000	52	970.4907 7335	1410.4293 1984
3	3.2781 0000	3.3100 0000	53	1058.8349 4296	1552.4722 5183
4	4.5731 2900	4.6410 0000	54	1155.1300 8782	1708.7194 7701
5	5.9847 1061	6.1051 0000	55	1260.0917 9573	1880.5915 2471
6	7.5233 3456	7.7156 1000	56	1374.5000 5734	2069.6505 6718
7	9.2004 3468	9.4871 7100	57	1499.2050 6250	2277.6156 2390
8	11.0284 7380	11.4358 8810	58	1635.1335 1813	2506.3771 8629
9	13.0210 3644	13.5794 7691	59	1783.2955 3476	2758.0149 0491
10	15.1929 2972	15.9374 2460	60	1944.7921 3289	3034.8163 9541
11	17.5602 9339	18.5311 6706	61	2120.8234 2485	3339.2980 3496
12	20.1407 1980	21.3842 8377	62	2312.6975 3308	3674.2278 3845
13	22.9533 8458	24.5227 1214	63	2521.8403 1106	4042.6506 2230
14	26.0191 8919	27.9749 8336	64	2749.8059 3906	4447.9156 8453
15	29.3609 1622	31.7724 8169	65	2998.2884 7357	4893.7072 5298
16	33.0033 9868	35.9497 2986	66	3269.1344 3619	5384.0779 7828
17	36.9737 0456	40.5447 0285	67	3564.3565 3545	5923.4857 7611
18	41.3013 3797	45.5991 7313	68	3886.1486 2364	6516.8343 5371
19	46.0184 5839	51.1590 9045	69	4236.9019 9977	7169.5177 8909
20	51.1601 1964	57.2749 9949	70	4619.2231 7975	7887.4695 6800
21	56.7645 3041	64.0024 9944	71	5035.9532 6593	8677.2165 2480
22	62.8733 3815	71.4027 4939	72	5490.1890 5986	9545.9381 7728
23	69.5319 3858	79.5430 2433	73	5985.3060 7525	10501.5319 9500
24	76 7898 1305	88.4973 2676	74	6524.9836 2202	11552.6851 9450
25	84.7008 9623	98.3470 5943	75	7113.2321 4800	12708.9537 1395
26	93.3239 7689	109.1817 6538	76	7754.4239 4132	13980.8490 8535
27	102.7231 3481	121.0999 4191	77	8453.3211 1504	15379.9339 9388
28	112.9682 1694	134.2099 3611	78	9215.1200 1539	16918.9273 9327
29	124.1353 5646	148.6309 2972	79	10045.4808 1678	18611.8201 3260
30	136.3075 3855	164.4940 2269	80	10950.5740 9029	20474.0021 4586
31	149.5752 1701	181.9434 2496	81	11937.1257 5842	22522.4023 6045
32	164.0369 8655	201.1377 6745	82	13012.4670 7667	24775.6425 9649
33	179.8003 1533	222.2515 4420	83	14184.5891 1357	27254.2068 5614
34	196.9823 4372	245.4766 9862	84	15462.2021 3379	29980.6275 4175
35	215.7107 5465	271.0243 6848	85	16854.8003 2584	32979.6902 9593
36	236.1247 2257	299.1268 0533	86	18372.7323 5516	36278.6593 2552
37	258.3759 4760	330.0394 8586	87	20027.2782 6713	39907.5252 5807
38	282.6297 8288	364.0434 3445	88	21830.7333 1117	43899.2777 8388
39	309.0664 6334	401.4477 7789	89	23796.4993 0917	48290.2055 6227
40	337.8824 4504	442.5925 5568	90	25939.1842 4700	53120.2261 1850
41	369 2918 6510	487.8518 1125	91	28274.7108 2923	58433.2487 3035
42	403.5281 3296	537.6369 9238	92	30820.4348 0386	64277.5736 0338
43	440.8456 6492	592.4006 9161	93	33595.2739 3621	70706.3309 6372
44	481.5217 7477	652.6407 6077	94	36619.8485 9046	77777.9640 6009
45	525.8587 3449	718.9048 3685	95	39916.6349 6361	85556.7604 6610
46	574.1860 2060	791.7953 2054	96	43510.1321 1033	94113.4365 1271
47	626.8627 6245	871.9748 5259	97	47427.0440 0026	103525.7801 6398
48	684.2804 1107	960.1723 3785	98	51696.4779 6028	113879.3581 8038
49	746.8656 4807	1057.1895 7163	99	56350.1609 7671	125268.2939 9842
50	815.0835 5640	1163.9085 2880	100	61422.6754 6461	137796.1233 9826

TABOA — V

Esta Taboa mostra o presente valor da *Renda 1* pagavel no fim de cada anno, pelo numero de annos indicado no mesmo alinhamento á esquerda (desde 1 até 100), fazendo-se o desconto á taxa de juro composto indicado no alto da columna. A sua expressão (veja-se Secç. II, § 3º) é:

$$P_n = \frac{1-r^{-n}}{t}.$$

TAXAS (14 DIVERSAS):

2, $2^1/_2$, 3, $3^1/_4$, $3^1/_2$, $3^3/_4$
4, $4^1/_2$
5, 6, 7, 8, 9, 10.

Os valores desta Taboa achão-se dividindo os valores relativos á mesma taxa e anno da Tab. IV pelos da Taboa I.

Obtem-se os logarithmos das quantidades desta Taboa, tomando-se o complemento do logarithmo correspondente á mesma taxa e anno na Taboa VI:

$$\log P_n = \text{Compl. } \log \alpha$$

Annos	2 %	2 1/2 %	Annos	2 %	2 1/2 %
1	0.9803 9216	0.9756 0976	51	31.7878 4891	28.6461 5774
2	1.9415 6094	1.9274 2415	52	32.1449 4992	28.9230 8072
3	2.8838 8327	2.8560 2356	53	32.4950 4894	29.1932 4948
4	3.8077 2870	3.7619 7421	54	32.8382 8327	29.4568 2877
5	4.7134 5951	4.6458 2849	55	33.1747 8752	29.7139 7928
6	5.6014 3089	5.5081 2536	56	33.5046 9365	29.9648 5784
7	6.4719 9107	6.3493 9060	57	33.8281 3103	30.2096 1740
8	7.3254 8144	7.1701 3717	58	34.1452 2650	30.4484 0722
9	8.1622 3671	7.9708 6553	59	34.4561 0441	30.6813 7290
10	8.9825 8501	8.7520 6393	60	34.7608 8658	30.9086 5649
11	9.7868 4804	9.5142 0871	61	35.0596 9282	31.1303 9657
12	10.5753 4122	10.2577 6460	62	35.3526 4002	31.3467 2836
13	11.3483 7375	10.9831 8497	63	35.6398 4316	31.5577 8377
14	12.1062 4877	11.6909 1217	64	35.9214 1486	31.7636 9148
15	12.8492 6350	12.3813 7773	65	36.1974 6555	31.9645 7706
16	13.5777 0931	13.0550 0266	66	36.4681 0348	32.1605 6298
17	14.2918 7188	13.7121 9772	67	36.7334 3478	32.3517 6876
18	14.9920 3125	14.3533 6363	68	36.9935 6351	32.5383 1099
19	15.6784 6201	14.9788 9134	69	37.2485 9168	32.7203 0341
20	16.3514 3334	15.5891 6228	70	37.4986 1929	32.8978 5698
21	17.0112 0916	16.1845 4857	71	37.7437 4440	33.0710 7998
22	17.6580 4820	16.7654 3824	72	37.9840 6314	33.2400 7803
23	18 2922 0411	17.3321 1048	73	38.2196 6975	33.4049 5417
24	18.9139 2560	17.8849 8583	74	38.4506 5661	33.5658 0895
25	19.5234 5647	18.4243 7642	75	38.6771 1433	33.7227 4044
26	20.1210 3576	18.9506 1114	76	38.8991 3169	33.8758 4433
27	20.7068 9780	19.4640 1087	77	39.1167 9578	34.0252 1398
28	21.2812 7235	19.9648 8865	78	39.3301 9194	34.1709 4047
29	21.8443 8466	20.4535 4991	79	39 5394 0386	34.3131 1265
30	22.3964 5555	20.9302 9259	80	39.7445 1359	34.4518 1722
31	22.9377 0152	21.3954 0741	81	39.9456 0156	34.5871 3875
32	23.4683 3482	21.8491 7796	82	40.1427 4663	34.7191 5976
33	23.9885 6355	22.2918 8093	83	40.3360 2610	34.8479 6074
34	24.4985 9172	22.7237 8628	84	40.5255 1579	34.9736 2023
35	24.9986 1933	23.1451 5734	85	40.7112 8999	35.0962 1486
36	25.4888 4248	23.5562 5107	86	40.8934 2156	35.2158 1938
37	25.9694 5341	23.9573 1811	87	41.0719 8192	35.3325 0671
38	26.4406 4060	24.3486 0304	88	41.2470 4110	35.4463 4801
39	26.9025 8882	24.7303 4443	89	41.4186 6774	35.5574 1269
40	27.3554 7924	25.1027 7505	90	41.5869 2916	35.6657 6848
41	27.7994 8945	25.4661 2200	91	41.7518 9133	35.7714 8144
42	28.2347 9358	25.8206 0683	92	41.9136 1895	35.8746 1604
43	28.6615 6233	26.1664 4569	93	42.0721 7544	35.9752 3516
44	29.0799 6307	26 5038 4945	94	42.2276 2298	36.0734 0016
45	29.4901 5987	26.8330 2386	95	42.3800 2253	36.1691 7089
46	29.8923 1360	27.1541 6962	96	42.5294 3386	36.2626 0574
47	30.2865 8196	27.4674 8255	97	42.6759 1555	36.3537 6170
48	30.6731 1957	27.7731 5371	98	42.8195 2504	36.4426 9434
49	31.0520 7801	28.0713 6947	99	42.9603 1867	36.5294 5789
50	31.4236 0589	28.3623 1168	100	43.0983 5164	36.6141 0526

Annos	3 %	3 1/4 %	Annos	3 %	3 1/4 %
1	0.9708 7379	0.9685 230	51	25.9512 2719	24.7474 691
2	1.9134 6970	1.9065 598	52	26.1662 3999	24.9370 161
3	2.8286 1135	2.8150 700	53	26.3749 9028	25.1205 967
4	3.7170 9840	3.6949 831	54	26.5776 6047	25.2983 987
5	4.5797 0719	4.5471 991	55	26.7744 2761	25.4706 041
6	5.4171 9144	5.3725 899	56	26.9654 6373	25.6373 890
7	6.2302 8296	6.1719 999	57	27.1509 3566	25.7989 239
8	7.0196 9219	6.9462 469	58	27.3310 0549	25.9553 743
9	7.7861 0892	7.6961 229	59	27.5058 3058	26.1069 000
10	8.5302 0284	8.4223 951	60	27.6755 6367	26.2536 562
11	9.2526 2411	9.1258 064	61	27.8403 5307	26.3957 929
12	9.9540 0399	9.8070 764	62	28.0003 4279	26.5334 556
13	10.6349 5533	10.4669 021	63	28.1556 7261	26.6667 851
14	11.2960 7314	11.1059 584	64	28.3064 7826	26.7959 178
15	11.9379 3509	11.7248 992	65	28.4528 9152	26.9209 857
16	12.5611 0203	12.3243 576	66	28.5950 4031	27.0421 169
17	13.1661 1847	12.9049 468	67	28.7330 4884	27.1594 353
18	13.7535 1308	13.4672 608	68	28.8670 3771	27.2730 608
19	14.3237 9911	14.0118 749	69	28.9971 2399	27.3831 097
20	14.8774 7486	14.5393 461	70	29.1234 2135	27.4896 947
21	15.4150 2414	15.0502 142	71	29.2460 4015	27.5929 246
22	15.9369 1664	15.5450 016	72	29.3650 8752	27.6929 052
23	16.4436 0839	16.0242 147	73	29.4806 6750	27.7897 387
24	16.9355 4212	16.4883 435	74	29.5928 8107	27.8835 242
25	17.4131 4769	16.9378 629	75	29.7018 2628	27.9743 575
26	17.8768 4242	17.3732 329	76	29.8075 9833	28.0623 318
27	18.3270 3147	17.7948 987	77	29.9102 8964	28.1475 368
28	18.7641 0823	18.2032 917	78	30.0099 8994	28.2300 599
29	19.1884 5459	18.5988 297	79	30.1067 8635	28.3099 853
30	19.6004 4135	18.9819 174	80	30.2007 6345	28.3873 950
31	20.0004 2849	19.3529 466	81	30.2920 0335	28.4623 680
32	20.3887 6553	19.7122 970	82	30.3805 8577	28.5349 812
33	20.7657 9178	20.0603 361	83	30.4665 8813	28.6053 086
34	21.1318 3668	20.3974 199	84	30.5500 8556	28.6734 224
35	21.4872 2007	20.7238 934	85	30.6311 5103	28.7393 921
36	21.8322 5250	21.0400 904	86	30.7098 5537	28.8032 854
37	22.1672 3544	21.3463 346	87	30.7862 6735	28.8651 674
38	22.4924 6159	21.6429 391	88	30.8604 5374	28.9251 016
39	22.8082 1513	21.9302 073	89	30.9324 7936	28.9831 493
40	23.1147 7197	22.2084 332	90	31.0024 0714	29.0393 698
41	23.4123 9997	22.4779 014	91	31.0702 9820	29.0938 206
42	23.7013 5920	22.7388 876	92	31.1362 1184	29.1465 575
43	23.9819 0213	22.9916 587	93	31.2002 0567	29.1976 344
44	24.2542 7392	23.2364 733	94	31.2623 3560	29.2471 035
45	24.5187 1254	23.4735 819	95	31.3226 5592	29.2950 155
46	24.7754 4907	23.7032 270	96	31.3812 1934	29.3414 194
47	25.0247 0783	23.9256 436	97	31.4380 7703	29.3863 626
48	25.2667 0664	24.1410 592	98	31.4932 7867	29.4298 911
49	25.5016 5693	24.3496 941	99	31.5468 7250	29.4720 495
50	25.7297 6401	24.5517 619	100	31.5989 0534	29.5128 809

Annos	3 1/2 %	3 3/4 %	Annos	3 1/2 %	3 3/4 %
1	0.9661 8357	0.9638 554	51	23.6286 1630	22.5874 633
2	1.8996 9428	1.8928 727	52	23.7957 6454	22.7349 044
3	2.8016 3698	2.7883 110	53	23.9572 6043	22.8770 163
4	3.6730 7921	3.6513 841	54	24.1132 9510	23.0139 916
5	4.5150 5238	4.4832 618	55	24.2640 5323	23.1460 160
6	5.3285 5302	5.2850 716	56	24.4097 1327	23.2732 684
7	6.1145 4398	6.0579 004	57	24.5504 4760	23.3959 214
8	6.8739 5554	6.8027 955	58	24.6864 2281	23.5141 411
9	7.6076 8651	7.5207 668	59	24.8177 9981	23.6280 878
10	8.3166 0532	8.2127 873	60	24.9447 3412	23.7379 159
11	9.0015 5104	8.8797 949	61	25.0673 7596	23.8437 744
12	9.6633 3433	9.5226 939	62	25.1858 7049	23.9458 067
13	10.3027 3849	10.1423 556	63	25.3003 5796	24.0441 510
14	10.9205 2028	10.7396 198	64	25.4109 7388	24.1389 407
15	11.5174 1090	11.3152 962	65	25.5178 4916	24.2303 043
16	12.0941 1681	11.8701 650	66	25.6211 1030	24.3183 656
17	12.6513 2059	12.4049 784	67	25.7208 7951	24.4032 439
18	13.1896 8173	12.9204 611	68	25.8172 7489	24.4850 544
19	13.7098 3742	13.4173 119	69	25.9104 1052	24.5639 079
20	14.2124 0330	13.8962 042	70	26.0003 9664	24.6399 112
21	14.6979 7420	14.3577 872	71	26.0873 3975	24.7131 674
22	15.1671 2484	14.8026 865	72	26.1713 4275	24.7837 758
23	15.6204 1047	15.2315 050	73	26.2525 0508	24.8518 321
24	16.0583 6760	15.6448 241	74	26.3309 2278	24.9174 285
25	16.4815 1459	16.0432 040	75	26.4066 8868	24.9806 540
26	16.8903 5226	16.4271 845	76	26.4798 9244	25.0415 942
27	17.2853 6451	16.7972 863	77	26.5506 2072	25.1003 318
28	17.6670 1885	17.1540 109	78	26.6189 5721	25.1569 463
29	18.0357 6700	17.4978 418	79	26.6849 8281	25.2115 145
30	18.3920 4541	17.8292 451	80	26.7487 7567	25.2641 104
31	18.7362 7576	18.1486 700	81	26.8104 1127	25.3148 052
32	19.0688 6547	18.4565 494	82	26.8699 6258	25.3636 676
33	19.3902 0818	18.7533 006	83	26.9275 0008	25.4107 640
34	19.7006 8423	19.0393 259	84	26.9830 9186	25.4561 581
35	20.0006 6110	19.3150 129	85	27.0368 0373	25.4999 114
36	20.2904 9381	19.5807 354	86	27.0886 9926	25.5420 833
37	20.5705 2542	19.8368 533	87	27.1388 3986	25.5827 309
38	20.8410 8736	20.0837 141	88	27.1872 8489	25.6219 093
39	21.1024 9987	20.3216 521	89	27.2340 9168	25.6596 716
40	21.3550 7234	20.5509 900	90	27.2793 1564	25.6960 690
41	21.5991 0371	20.7720 385	91	27.3230 1028	25.7311 508
42	21.8348 8281	20.9850 974	92	27.3652 2732	25.7649 647
43	22.0626 8870	21.1904 553	93	27.4060 1673	25.7975 563
44	22.2827 9102	21.3883 907	94	27.4454 2680	25.8289 699
45	22.4954 5026	21.5791 717	95	27.4835 0415	25.8592 481
46	22.7009 1813	21.7630 571	96	27.5202 9387	25.8884 319
47	22.8994 3780	21.9402 960	97	27.5558 3948	25.9165 609
48	23.0912 4425	22.1111 287	98	27.5901 8308	25.9436 731
49	23.2765 6450	22.2757 867	99	27.6233 6529	25.9698 054
50	23.4556 1787	22.4344 932	100	27.6554 2540	25.9949 932

Annos	4 %	4 1/2 %	Annos	4 %	4 1/2 %
1	0.9615 3846	0.9569 3780	51	21.6174 8521	19.8679 5003
2	1.8860 9467	1.8726 6775	52	21.7475 8193	19.9693 3017
3	2.7750 9103	2.7489 6435	53	21.8726 7493	20.0663 4466
4	3.6298 9522	3.5875 2570	54	21.9929 5667	20.1591 8149
5	4.4518 2233	4.3899 7674	55	22.1086 1218	20 2480 2057
6	5.2421 3686	5 1578 7248	56	22.2198 1940	20.3330 3404
7	6.0020 5467	5.8927 0094	57	22.3267 4943	20.4143 8664
8	6.7327 4487	6.5958 8607	58	22.4295 6376	20.4922 3602
9	7.4353 3161	7.2687 9050	59	22.5284 2957	20.5667 3303
10	8.1108 9578	7.9127 1818	60	22.6234 8997	20.6380 2204
11	8.7604 7671	8.5289 1692	61	22.7148 9421	20.7062 4118
12	9.3850 7376	9.1185 8078	62	22.8027 8289	20.7715 2266
13	9.9856 4785	9.6828 5242	63	22.8872 9124	20.8339 9298
14	10.5631 2293	10.2228 2528	64	22.9685 4927	20.8937 7319
15	11.1183 8743	10.7395 4573	65	23.0466 8199	20.9509 7913
16	11.6522 9561	11.2340 1505	66	23.1218 0961	21.0057 2165
17	12.1656 6885	11.7071 9143	67	23.1940 4770	21.0581 0684
18	12.6592 9697	12.1599 9180	68	23.2635 0740	21.1082 3621
19	13.1339 3940	12.5932 9359	69	23.3302 9558	21.1562 0690
20	13.5903 2634	13.0079 3645	70	23.3945 1498	21.2021 1187
21	14.0291 5995	13.4047 2388	71	23.4562 6440	21.2460 4007
22	14.4511 1533	13.7844 2476	72	23.5156 3885	21.2880 7662
23	14.8568 4167	14.1477 7489	73	23.5727 2966	21.3283 0298
24	15.2469 6314	14.4954 7837	74	23 6276 2468	21.3667 9711
25	15.6220 7994	14.8282 0896	75	23.6804 0834	21.4036 3360
26	15.9827 6918	15.1466 1145	76	23.7311 6187	21.4388 8383
27	16.3295 8575	15.4513 0282	77	23.7799 6333	21.4726 1611
28	16.6630 6322	15.7428 7351	78	23.8268 8782	21.5048 9579
29	16.9837 1463	16.0218 8853	79	23.8720 0752	21.5357 8545
30	17.2920 3330	16.2888 8854	80	23.9153 9185	21.5653 4493
31	17.5884 9356	16.5443 9095	81	23.9571 0755	21.5936 3151
32	17.8735 5150	16.7888 9086	82	23.9972 1879	21.6207 0001
33	18.1476 4567	17.0228 6207	83	24.0357 8730	21.6466 0288
34	18.4111 9776	17.2467 5796	84	24.0728 7241	21.6713 9032
35	18.6646 1323	17.4610 1240	85	24.1085 3116	21.6951 1035
36	18.9082 8195	17.6660 4058	86	24.1428 1842	21.7178 0895
37	19.1425 7880	17.8622 3979	87	24.1757 8694	21.7395 3009
38	19.3678 6423	18.0499 9023	88	24.2074 8745	21.7603 1588
39	19.5844 8484	18.2296 5572	89	24.2379 6870	21.7802 0658
40	19.7927 7388	18.4015 8442	90	24.2672 7759	21.7992 4075
41	19.9930 5181	18.5661 0949	91	24.2954 5923	21.8174 5526
42	20.1856 2674	18.7235 4975	92	24.3225 5695	21.8348 8542
43	20.3707 9494	18.8742 1029	93	24.3486 1245	21.8515 6499
44	20.5488 4129	19.0183 8305	94	24.3736 6582	21.8675 2631
45	20.7200 3970	19.1563 4742	95	24.3977 5559	21.8828 0030
46	20.8846 5356	19.2883 7074	96	24.4209 1884	21.8974 1655
47	21.0429 3612	19.4147 0884	97	24.4431 9119	21.9114 0340
48	21.1951 3088	19.5356 0654	98	24.4646 0692	21.9247 8794
49	21.3414 7200	19.6512 9813	99	24.4851 9896	21.9375 9612
50	21.4821 8462	19.7620 0778	100	24.5049 9900	21.9498 5274

Annos	5 %	6 %	Annos	5 %	6 %
1	0.9523 8095	0.9433 9623	51	18.3389 7663	15.8130 7607
2	1.8594 1043	1.8333 9267	52	18.4180 7298	15.8613 9252
3	2.7232 4803	2.6730 1195	53	18.4934 0284	15.9069 7408
4	3.5459 5050	3.4651 0561	54	18.5651 4556	15.9499 7554
5	4.3294 7667	4.2123 6379	55	18.6334 7196	15.9905 4297
6	5.0756 9207	4.9173 2433	56	18.6985 4473	16.0288 1412
7	5.7863 7340	5.5823 8144	57	18.7605 1879	16.0649 1898
8	6.4632 1276	6.2097 9381	58	18.8195 4170	16.0989 8017
9	7.1078 2168	6.8016 9227	59	18.8757 5400	16.1311 1337
10	7.7217 3493	7.3600 8705	60	18.9292 8953	16.1614 2771
11	8.3064 1422	7.8868 7458	61	18.9802 7574	16.1900 2614
12	8.8632 5164	8.3838 4394	62	19.0288 3404	16.2170 0579
13	9.3935 7299	8.8526 8296	63	19.0750 8003	16.2424 5829
14	9.8986 4094	9.2949 8393	64	19.1191 2384	16.2664 7009
15	10.3796 5804	9.7122 4899	65	19.1610 7033	16.2891 2272
16	10.8377 6956	10.1058 9527	66	19.2010 1936	16.3104 9314
17	11.2740 6625	10.4772 5969	67	19.2390 6606	16.3306 5390
18	11.6895 8690	10.8276 0348	68	19.2753 0101	16.3496 7349
19	12.0853 2086	11.1581 1649	69	19.3098 1048	16.3676 1650
20	12.4622 1034	11.4699 2122	70	19.3426 7665	16.3845 4387
21	12.8211 5271	11.7640 7662	71	19.3739 7776	16.4005 1308
22	13.1630 0258	12.0415 8172	72	19.4037 8834	16.4155 7838
23	13.4885 7388	12.3033 7898	73	19.4321 7937	16.4297 9093
24	13.7986 4179	12.5503 5753	74	19.4592 1845	16.4431 9899
25	14.0939 4457	12.7833 5616	75	19.4849 6995	16.4558 4810
26	14.3751 8530	13.0031 6519	76	19.5094 9519	16.4677 8123
27	14.6430 3362	13.2105 3414	77	19.5328 5257	16.4790 3889
28	14.8981 2726	13.4061 6428	78	19.5550 9768	16.4896 5933
29	15.1410 7358	13.5907 2102	79	19.5762 8351	16.4996 7862
30	15.3724 5103	13.7648 3115	80	19.5964 6048	16.5091 3077
31	15.5928 1050	13.9290 8599	81	19.6156 7635	16.5180 4790
32	15.8026 7667	14.0840 4339	82	19.6339 7776	16.5264 6028
33	16.0025 4921	14.2302 2961	83	19.6514 0739	16.5343 9649
34	16.1929 0401	14.3681 4114	84	19.6680 0704	16.5418 8348
35	16.3741 9429	14.4982 4636	85	19.6838 1623	16.5489 4668
36	16.5468 5171	14.6209 8713	86	19.6988 7260	16.5556 1008
37	16.7112 8734	14.7367 8031	87	19.7132 1200	16.5618 9630
38	16.8678 9271	14.8460 1916	88	19.7268 6857	16.5678 2670
39	17.0170 4067	14.9490 7468	89	19.7398 7483	16.5734 2141
40	17.1590 8635	15.0462 9687	90	19.7522 6174	16.5786 9944
41	17.2943 6796	15.1380 1592	91	19.7640 5880	16.5836 7872
42	17.4232 0758	15.2245 4332	92	19.7752 9410	16.5883 7615
43	17.5459 1198	15.3061 7294	93	19.7859 9438	16.5928 0769
44	17.6627 7331	15.3831 8202	94	19.7961 8512	16.5969 8839
45	17.7740 6982	15.4558 3209	95	19.8058 9059	16.6009 3244
46	17.8800 6650	15.5243 6990	96	19.8151 3390	16.6046 5325
47	17.9810 1571	15.5890 2821	97	19.8239 3705	16.6081 6344
48	18.0771 5782	15.6500 2661	98	19.8323 2100	16.6114 7494
49	18.1687 2173	15.7075 7227	99	19.8403 0571	16.6145 9900
50	18.2559 2546	15.7618 6064	100	19.8479 1020	16.6175 4623

Annos	7 %	8 %	Annos	7 %	8 %
1	0.9345 794	0.9259 259	51	13.8324 732	12.2532 265
2	1.8080 182	1.7832 647	52	13.8621 245	12.2715 060
3	2.6243 160	2.5770 970	53	13.8898 359	12.2884 315
4	3.3872 112	3.3121 268	54	13.9157 345	12.3041 033
5	4.1001 974	3.9927 101	55	13.9399 388	12.3186 141
6	4.7665 397	4.6228 797	56	13.9625 596	12.3320 501
7	5.3892 894	5.2063 701	57	13.9837 006	12.3444 908
8	5.9712 985	5.7466 389	58	14.0034 585	12.3560 100
9	6.5152 322	6.2468 879	59	14.0219 238	12.3666 760
10	7.0235 815	6.7100 814	60	14.0391 811	12.3765 518
11	7.4986 743	7.1389 643	61	14.0553 095	12.3856 961
12	7.9426 863	7.5360 780	62	14.0703 827	12.3941 631
13	8.3576 507	7.9037 759	63	14.0844 698	12.4020 029
14	8.7454 680	8.2442 370	64	14.0976 353	12.4092 619
15	9.1079 140	8.5594 787	65	14.1099 396	12.4159 832
16	9.4466 486	8.8513 692	66	14.1214 388	12.4222 067
17	9.7632 230	9.1216 381	67	14.1321 858	12.4279 692
18	10.0590 869	9.3718 871	68	14.1422 297	12.4333 048
19	10.3355 952	9.6035 992	69	14.1516 166	12.4382 452
20	10.5940 142	9.8181 474	70	14.1603 893	12.4428 196
21	10.8355 273	10.0168 031	71	14.1685 882	12.4470 552
22	11.0612 405	10.2007 437	72	14.1762 506	12.4509 770
23	11.2721 874	10.3710 589	73	14.1834 118	12.4546 084
24	11.4693 340	10.5287 583	74	14.1901 045	12.4579 707
25	11.6535 832	10.6747 762	75	14.1963 593	12.4610 840
26	11.8257 787	10.8099 779	76	14.2022 050	12.4639 667
27	11.9867 090	10.9351 648	77	14.2076 682	12.4666 358
28	12.1371 112	11.0510 785	78	14.2127 740	12.4691 072
29	12.2776 741	11.1584 060	79	14.2175 458	12.4713 956
30	12.4090 412	11.2577 833	80	14.2220 054	12.4735 142
31	12.5318 142	11.3497 994	81	14.2261 733	12.4754 763
32	12.6465 553	11.4349 994	82	14.2300 685	12.4772 929
33	12.7537 900	11.5138 884	83	14.2337 090	12.4789 749
34	12.8540 094	11.5869 337	84	14.2371 111	12.4805 323
35	12.9476 723	11.6545 682	85	14.2402 907	12.4819 744
36	13.0352 078	11.7171 928	86	14.2432 624	12.4833 096
37	13.1170 166	11.7751 785	87	14.2460 396	12.4845 459
38	13.1934 734	11.8288 690	88	14.2486 351	12.4856 907
39	13.2649 285	11.8785 824	89	14.2510 609	12.4867 506
40	13.3317 088	11.9246 133	90	14.2533 279	12.4877 320
41	13.3941 204	11.9672 346	91	14.2554 467	12.4886 408
42	13.4524 490	12.0066 987	92	14.2574 268	12.4894 822
43	13.5069 617	12.0432 395	93	14.2592 774	12.4902 613
44	13.5579 081	12.0770 736	94	14.2610 069	12.4909 827
45	13.6055 216	12.1084 015	95	14.2626 233	12.4916 506
46	13.6500 201	12.1374 088	96	14.2641 339	12.4922 691
47	13.6916 076	12.1642 674	97	14.2655 457	12.4928 418
48	13.7304 744	12.1891 365	98	14.2668 651	12.4933 720
49	13.7667 985	12.2121 634	99	14.2680 982	12.4938 630
50	13.8007 463	12.2334 846	100	14.2692 507	12.4943 176

Annos	9 %	10 %	Annos	9 %	10 %
1	0.9174 3119	0.9090 9091	51	10.9740 2101	9.9225 5863
2	1.7591 1119	1.7355 3719	52	10.9853 4038	9.9295 9875
3	2.5312 9467	2.4868 5199	53	10.9957 2512	9.9359 9886
4	3.2397 1988	3.1698 6545	54	11.0052 5240	9.9418 1715
5	3.8896 5126	3.7907 8677	55	11.0139 9303	9.9471 0650
6	4.4859 1859	4.3552 6070	56	11.0220 1195	9.9519 1500
7	5.0329 5284	4.8684 1882	57	11.0293 6876	9.9562 8636
8	5.5348 1911	5.3349 2620	58	11.0361 1813	9.9602 6033
9	5.9952 4689	5.7590 2382	59	11.0423 1021	9.9638 7303
10	6.4176 5770	6.1445 6711	60	11.0479 9102	9.9671 5730
11	6.8051 9055	6.4950 6101	61	11.0532 0277	9.9701 4300
12	7.1607 2528	6.8136 9183	62	11.0579 8419	9.9728 5727
13	7.4869 0392	7.1033 5620	63	11.0623 7082	9.9753 2479
14	7.7861 5039	7.3666 8746	64	11.0663 9525	9.9775 6799
15	8.0606 8843	7.6060 7951	65	11.0700 8738	9.9796 0727
16	8.3125 5819	7.8237 0864	66	11.0734 7466	9.9814 6115
17	8.5436 3137	8.0215 5331	67	11.0765 8226	9.9831 4650
18	8.7556 2511	8.2014 1210	68	11.0794 3327	9.9846 7864
19	8.9501 1478	8.3649 2009	69	11.0820 4887	9.9860 7149
20	9.1285 4567	8.5135 6372	70	11.0844 4850	9.9873 3772
21	9.2922 4373	8.6486 9429	71	11.0866 5000	9.9884 8883
22	9.4424 2544	8.7715 4026	72	11.0886 6973	9.9895 3530
23	9.5802 0683	8.8832 1843	73	11.0905 2269	9.9904 8664
24	9.7066 1177	8.9847 4402	74	11.0922 2265	9.9913 5149
25	9.8225 7961	9.0770 4002	75	11.0937 8225	9.9921 3772
26	9.9289 7211	9.1609 4547	76	11.0952 1307	9.9928 5247
27	10.0265 7992	9.2372 2316	77	11.0965 2575	9.9935 0225
28	10.1161 2837	9.3065 6651	78	11.0977 3005	9.9940 9295
29	10.1982 8291	9.3696 0591	79	11.0988 3491	9.9946 2996
30	10.2736 5404	9.4269 1447	80	11.0998 4854	9.9951 1814
31	10.3428 0187	9.4790 1315	81	11.1007 7848	9.9955 6195
32	10.4062 4025	9.5263 7559	82	11.1016 3163	9.9959 6541
33	10.4644 4060	9.5694 3236	83	11.1024 1434	9.9963 3219
34	10.5178 3541	9.6085 7487	84	11.1031 3242	9.9966 6563
35	10.5668 2148	9.6441 5897	85	11.1037 9121	9.9969 6875
36	10.6117 6282	9.6765 0816	86	11.1043 9561	9.9972 4432
37	10.6529 9342	9.7059 1651	87	11.1049 5010	9.9974 9484
38	10.6908 1965	9.7326 5137	88	11.1054 5881	9.9977 2258
39	10.7255 2261	9.7569 5579	89	11.1059 2551	9.9979 2962
40	10.7573 6020	9.7790 5072	90	11.1063 5364	9.9981 1783
41	10.7865 6899	9.7991 3702	91	11.1067 4645	9.9982 8894
42	10.8133 6604	9.8173 9729	92	11.1071 0683	9.9984 4449
43	10.8379 5050	9.8339 9754	93	11.1074 3746	9.9985 8590
44	10.8605 0504	9.8490 8867	94	11.1077 4078	9.9987 1445
45	10.8811 9729	9.8628 0788	95	11.1080 1906	9.9988 3132
46	10.9001 8100	9.8752 7989	96	11.1082 7437	9.9989 3757
47	10.9175 9725	9.8866 1808	97	11.1085 0859	9.9990 3415
48	10.9335 7546	9.8969 2553	98	11.1087 2347	9.9991 2195
49	10.9482 3436	9.9062 9594	99	11.1089 2061	9.9992 0178
50	10.9616 8290	9.9148 1449	100	11.1091 0148	9.9992 7434

TABOA — VI

Esta Taboa mostra o *quantum* de annuidade que pode produzir no fim de cada anno o capital 1 com os seus juros compostos á taxa indicada no alto da Taboa, pelo numero de annos indicado no mesmo alinhamento á esquerda (desde 1 até 100). Em outros termos: a annuidade capaz de amortizar o mesmo capital e juros no mesmo tempo, á mesma taxa. A sua expressão (veja-se § 9°, Secç. II e § 2°, Secç. III) é:

$$\alpha = \frac{t}{1 - r^{-n}}.$$

Ao lado direito das quantidades numericas achão-se os seus logarithmos com 7 decimaes:

Log α.

A caracteristica expressa de um logarithmo pertencerá a todos os logarithmos seguintes emquanto outra não estiver expressa.

TAXAS (31 DIVERSAS):

1,	$1^1/_4$,	$1^3/_8$,	$1^1/_2$, $1^5/_8$, $1^3/_4$, $1^7/_8$
2,	$2^1/_4$,	$2^1/_2$,	$2^3/_4$,
3,	$3^1/_4$,	$3^1/_2$,	$3^3/_4$
4,	$4^1/_4$,	$4^1/_2$,	$4^3/_4$
5,	$5^1/_4$,	$5^1/_2$,	$5^3/_4$
6,	$6^1/_2$,	7,	$7^1/_2$
8,	$8^1/_2$,	9,	10.

As quantidades numericas desta Taboa achão-se facilmente dividindo 1 pelas quantidades relativas á mesma taxa e anno da Tab. V; pois que, $\alpha = \frac{1}{P_n}$.

Com o auxilio dos logarithmos desta Taboa obtem-se os logarithmos das Taboas III, IV e V (veja-se).

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0100 0000	0.004 3214	51	0.0251 2680	$\bar{2}$.400 1373
2	0.5075 1244	$\bar{1}$.705 4467	52	.0247 5603	.393 6810
3	.3400 2211	.531 5071	53	.0243 9956	.387 3820
4	.2562 8109	.408 7166	54	.0240 5658	.381 2339
5	.2060 3980	.313 9511	55	.0237 2637	.375 2313
6	.1725 4837	.236 9109	56	.0234 0823	.369 3688
7	.1486 2828	.172 1014	57	.0231 0156	.363 6413
8	.1306 9029	.116 2434	58	.0228 0573	.358 0440
9	.1167 4037	.067 2210	59	.0225 2020	.352 5723
10	.1055 8208	.023 5902	60	.0222 4445	.347 2217
11	.0964 5408	$\bar{2}$.984 3206	61	.0219 7800	.341 9882
12	.0888 4879	.948 6515	62	.0217 2041	.336 8680
13	.0824 1482	.916 0053	63	.0214 7125	.331 8573
14	.0769 0117	.885 9330	64	.0212 3013	.326 9527
15	.0721 2378	.858 0785	65	.0209 9667	.322 1504
16	.0679 4460	.832 1549	66	.0207 7052	.317 4474
17	.0642 5806	.807 9276	67	.0205 5136	.312 8406
18	.0609 8205	.785 2021	68	.0203 3888	.308 3270
19	.0580 5175	.763 8153	69	.0201 3280	.303 9041
20	.0554 1532	.743 6298	70	.0199 3282	.299 5687
21	.0530 3075	.724 5277	71	.0197 3870	.295 3185
22	.0508 6371	.706 4081	72	.0195 5019	.291 1510
23	.0488 8584	.689 1831	73	.0193 6706	.287 0638
24	.0470 7347	.672 7762	74	.0191 8910	.283 0545
25	.0454 0675	.657 1204	75	.0190 1609	.279 1212
26	.0438 6888	.642 1565	76	.0188 4784	.275 2616
27	.0424 4553	.627 8320	77	.0186 8416	.271 4736
28	.0411 2444	.614 1000	78	.0185 2488	.267 9554
29	.0398 9502	.600 9187	79	.0183 6984	.264 1051
30	.0387 4811	.588 2506	80	.0182 1885	.260 5210
31	.0376 7573	.576 0617	81	.0180 7180	.257 0014
32	.0366 7089	.564 3214	82	.0179 2851	.253 5442
33	.0357 2744	.553 0019	83	.0177 8886	.250 1480
34	.0348 3997	.542 0778	84	.0176 5273	.246 8118
35	.0340 0368	.531 5259	85	.0175 1998	.243 5336
36	.0332 1431	.521 3252	86	.0173 9050	.240 3121
37	.0324 6805	.511 4562	87	.0172 6417	.237 1456
38	.0317 6150	.501 9010	88	.0171 4089	.234 0334
39	.0310 9160	.492 6430	89	.0170 2056	.230 9739
40	.0304 5560	.483 6672	90	.0169 0306	.227 9652
41	.0298 5102	.474 9592	91	.0167 8832	.225 0072
42	.0292 7563	.466 5062	92	.0166 7624	.222 0981
43	.0287 2737	.458 2959	93	.0165 6673	.219 2368
44	.0282 0441	.450 3170	94	.0164 5971	.216 4222
45	.0277 0505	.442 5589	95	.0163 5511	.213 6535
46	.0272 2775	.435 0117	96	.0162 5284	.210 9293
47	.0267 7111	.427 6663	97	.0161 5284	.208 2489
48	.0263 3384	.420 5142	98	.0160 5503	.205 6112
49	.0259 1474	.413 5469	99	.0159 5936	.203 0153
50	.0255 1273	.406 7569	100	.0158 6574	.200 4604

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0125 0000	0.005 3950	51	0.0266 3571	$\bar{2}$.425 4643
2	0.5093 9441	$\bar{1}$.707 0542	52	.0262 6896	.419 4429
3	.3417 0118	.533 6465	53	.0259 1652	.413 5767
4	.2578 6102	.411 3857	54	.0255 7760	.407 8598
5	.2075 6211	.317 1481	55	.0252 5145	.402 2863
6	.1740 3381	.240 6336	56	.0249 3739	.396 8510
7	.1500 8872	.176 3481	57	.0246 3478	.391 5487
8	.1321 3314	.121 0118	58	.0243 4303	.386 3746
9	.1181 7055	.072 5093	59	.0240 6158	.381 3241
10	.1070 0307	.029 3962	60	.0237 8993	.376 3932
11	.0978 6839	$\bar{2}$.990 6425	61	.0235 2759	.371 5774
12	.0902 5831	.955 4872	62	.0232 7410	.366 8729
13	.0838 2100	.923 3528	63	.0230 2904	.362 2759
14	.0783 0515	.893 7903	64	.0227 9202	.357 7828
15	.0735 2646	.866 4436	65	.0225 6268	.353 3907
16	.0693 4672	.841 0259	66	.0223 4064	.349 0956
17	.0656 6023	.817 3024	67	.0221 2560	.344 8951
18	.0623 8479	.795 0787	68	.0219 1724	.340 7859
19	.0594 5548	.774 1919	69	.0217 1527	.336 7652
20	.0568 2039	.754 5042	70	.0215 1941	.332 8304
21	.0544 3748	.735 8980	71	.0213 2941	.328 9788
22	.0522 7238	.718 2723	72	.0211 4501	.325 2079
23	.0502 9666	.701 5391	73	.0209 6600	.321 5156
24	.0484 8664	.685 6221	74	.0207 9215	.317 8994
25	.0468 2246	.670 4542	75	.0206 2325	.314 3571
26	.0452 8729	.655 9762	76	.0204 5910	.310 8865
27	.0438 6578	.642 1357	77	.0202 9953	.307 4860
28	.0425 4863	.628 8856	78	.0201 4435	.304 1533
29	.0413 2228	.616 1843	79	.0199 9341	.300 8869
30	.0401 7854	.603 9942	80	.0198 4652	.297 6844
31	.0391 0941	.592 2813	81	.0197 0356	.294 5447
32	.0381 0790	.581 0150	82	.0195 6436	.291 4656
33	.0371 6786	.570 1676	83	.0194 2881	.288 4462
34	.0362 8386	.559 7135	84	.0192 9675	.285 4842
35	.0354 5111	.549 6298	85	.0191 6808	.282 5786
36	.0346 6533	.539 8953	86	.0190 4267	.279 7278
37	.0339 2270	.530 4904	87	.0189 2041	.276 9305
38	.0332 1983	.521 3974	88	.0188 0119	.274 1853
39	.0325 5365	.512 5997	89	.0186 8490	.271 4908
40	.0319 2141	.504 0821	90	.0185 7146	.268 8460
41	.0313 2063	.495 8305	91	.0184 6076	.266 2496
42	.0307 4906	.487 8318	92	.0183 5271	.263 7002
43	.0302 0466	.480 0740	93	.0182 4724	.261 1972
44	.0296 8558	.472 5455	94	.0181 4425	.258 7390
45	.0291 9012	.465 2359	95	.0180 4366	.256 3246
46	.0287 1675	.458 1353	96	.0179 4540	.253 9531
47	.0282 6406	.451 2345	97	.0178 4940	.251 6236
48	.0278 3074	.444 5248	98	.0177 5560	.249 3354
49	.0274 1563	.437 9982	99	.0176 6392	.247 0871
50	.0270 1762	.431 6471	100	.0175 7428	.244 8775

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0137 5000	0.005 9309	51	0.0274 0900	$\bar{2}$.437 8932
2	0.5103 3597	$\bar{1}$.707 8562	52	.0270 4461	.432 1807
3	.3425 4173	.534 7135	53	.0266 9453	.426 4223
4	.2586 5243	.412 7166	54	.0263 5797	.420 9120
5	.2083 2510	.318 7416	55	.0260 3418	.415 5439
6	.1747 7878	.242 4887	56	.0257 2249	.410 3130
7	.1508 2157	.178 4635	57	.0254 2225	.405 2140
8	.1328 5758	.123 3863	58	.0251 3287	.400 2421
9	.1188 8906	.075 1419	59	.0248 5380	.395 3928
10	.1077 1737	.032 2857	60	.0245 8452	.390 6617
11	.0985 7973	$\bar{2}$.993 7876	61	.0243 2455	.386 0448
12	.0909 6765	.958 8870	62	.0240 7344	.381 5382
13	.0845 2903	.927 0059	63	.0238 3076	.377 1379
14	.0790 1246	.897 6956	64	.0235 9612	.372 8406
15	.0742 3351	.870 6000	65	.0233 6915	.368 6429
16	.0700 5389	.845 4322	66	.0231 4949	.364 5414
17	.0663 6780	.821 9574	67	.0229 3682	.360 5332
18	.0630 9301	.799 9812	68	.0227 3081	.356 6149
19	.0601 6457	.779 3408	69	.0225 3122	.352 7847
20	.0575 3053	.759 8984	70	.0223 3773	.349 0390
21	.0551 4884	.741 5364	71	.0221 5009	.345 3755
22	.0529 8507	.724 1535	72	.0219 6806	.341 7917
23	.0510 1080	.707 6621	73	.0217 9140	.338 2851
24	.0492 0235	.691 9858	74	.0216 1991	.334 8539
25	.0475 3982	.677 0575	75	.0214 5336	.331 4953
26	.0460 0635	.662 8178	76	.0212 9157	.328 2077
27	.0445 8762	.649 2143	77	.0211 3435	.324 9889
28	.0432 7134	.636 2003	78	.0209 8151	.321 8367
29	.0420 4690	.623 7340	79	.0208 3290	.318 7497
30	.0409 0511	.611 7776	80	.0206 8835	.315 7259
31	.0398 3797	.600 2972	81	.0205 4772	.312 7636
32	.0388 3850	.589 2624	82	.0204 1085	.309 8611
33	.0379 0053	.578 6453	83	.0202 7762	.307 0170
34	.0370 1863	.568 4203	84	.0201 4789	.304 2296
35	.0361 8801	.558 5647	85	.0200 2153	.301 4973
36	.0354 0438	.549 0570	86	.0198 9843	.298 8188
37	.0346 6394	.539 8779	87	.0197 7847	.296 1927
38	.0339 6327	.531 0095	88	.0196 6155	.293 6178
39	.0332 9931	.522 4352	89	.0195 4756	.291 0926
40	.0326 6931	.514 1400	90	.0194 3641	.288 6160
41	.0320 7078	.506 1095	91	.0193 2799	.286 1867
42	.0315 0148	.498 3310	92	.0192 2222	.283 8035
43	.0309 5936	.490 7920	93	.0191 1902	.281 4656
44	.0304 4257	.483 4813	94	.0190 1829	.279 1715
45	.0299 4941	.476 3883	95	.0189 1997	.276 9204
46	.0294 7836	.469 5033	96	.0188 2397	.274 7112
47	.0290 2799	.462 8170	97	.0187 3022	.272 5429
48	.0285 9701	.456 3206	98	.0186 3866	.270 4147
49	.0281 8424	.450 0063	99	.0185 4921	.268 3254
50	.0277 8857	.443 8662	100	.0184 6181	.266 2743

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0150 0000	0.006 4660	51	0.0281 9468	$\bar{2}$.450 1673
2	0.5112 7792	$\bar{1}$.708 6571	52	.0278 3287	.444 5580
3	.3433 8296	.535 7787	53	.0274 8537	.439 1015
4	.2594 4478	.414 0449	54	.0271 5138	.433 7919
5	.2090 8932	.320 3319	55	.0268 3017	.428 6234
6	.1755 2521	.244 3395	56	.0265 2106	.423 5909
7	.1515 5617	.180 5736	57	.0262 2340	.418 6890
8	.1335 8402	.125 7545	58	.0259 3661	.413 9132
9	.1196 0982	.077 7669	59	.0256 6012	.409 2587
10	.1084 3418	.035 1662	60	.0253 9343	.404 7213
11	.0992 9384	$\bar{2}$.996 9223	61	.0251 3604	.400 2969
12	.0916 7999	.962 2745	62	.0248 8751	.395 9815
13	.0852 4036	.930 6452	63	.0246 4741	.391 7713
14	.0797 2332	.901 5854	64	.0244 1534	.387 6627
15	.0749 4436	.874 7389	65	.0241 9094	.383 6527
16	.0707 6508	.849 8190	66	.0239 7385	.379 7378
17	.0670 7965	.826 5908	67	.0237 6376	.375 9150
18	.0638 0578	.804 8600	68	.0235 6033	.372 1813
19	.0608 7847	.784 4637	69	.0233 6329	.368 5340
20	.0582 4574	.765 2642	70	.0231 7235	.364 9701
21	.0558 6550	.747 1437	71	.0229 8727	.361 4874
22	.0537 0331	.730 0010	72	.0228 0779	.358 0832
23	.0517 3075	.713 7488	73	.0226 3369	.354 7553
24	.0499 2410	.698 3103	74	.0224 6473	.351 5012
25	.0482 6345	.683 6184	75	.0223 0072	.348 3189
26	.0467 3196	.669 6141	76	.0221 4146	.345 2062
27	.0453 1527	.656 2446	77	.0219 8676	.342 1613
28	.0440 0108	.643 4633	78	.0218 3645	.339 1821
29	.0427 7878	.631 2284	79	.0216 9036	.336 2668
30	.0416 3919	.619 5022	80	.0215 4832	.333 4134
31	.0405 7430	.608 2510	81	.0214 1019	.330 6205
32	.0395 7710	.597 4440	82	.0212 7583	.327 8865
33	.0386 4144	.587 0533	83	.0211 4509	.325 2095
34	.0377 6189	.577 0537	84	.0210 1784	.322 5881
35	.0369 3363	.567 4220	85	.0208 9396	.320 0207
36	.0361 5240	.558 1371	86	.0207 7333	.317 5061
37	.0354 1437	.549 1795	87	.0206 5584	.315 0428
38	.0347 1614	.540 5314	88	.0205 4138	.312 6296
39	.0340 5463	.532 1762	89	.0204 2984	.310 2649
40	.0334 2710	.524 0987	90	.0203 2113	.307 9479
41	.0328 3106	.516 2849	91	.0202 1515	.305 6771
42	.0322 6427	.508 7218	92	.0201 1182	.303 4514
43	.0317 2465	.501 3968	93	.0200 1104	.301 2697
44	.0312 1038	.494 2990	94	.0199 1273	.299 1308
45	.0307 1976	.487 4178	95	.0198 1682	.297 0339
46	.0302 5124	.480 7432	96	.0197 2322	.294 9778
47	.0298 0342	.474 2661	97	.0196 3186	.292 9614
48	.0293 7500	.467 9779	98	.0195 4268	.290 9841
49	.0289 6479	.461 8703	99	.0194 5560	.289 0446
50	.0285 7168	.455 9357	100	.0193 7057	.287 1424

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0162 5000	0.007 0006	51	0.0289 9263	$\bar{2}$.462 2876
2	0.5122 2024	$\bar{1}$.709 4567	52	.0286 3360	.456 8759
3	.3442 2488	.536 8422	53	.0282 8888	.451 6158
4	.2602 3810	.415 3709	54	.0279 5768	.446 5012
5	.2098 5476	.321 9189	55	.0276 3926	.441 5264
6	.1762 7314	.246 1862	56	.0273 3294	.436 6864
7	.1522 9251	.182 6786	57	.0270 3807	.431 9757
8	.1343 1247	.128 1163	58	.0267 5406	.427 3897
9	.1203 3285	.080 3842	59	.0264 8036	.422 9239
10	.1091 5351	.038 0376	60	.0262 1645	.418 5738
11	.1000 1073	.000 0466	61	.0259 6184	.414 3355
12	.0923 9537	$\bar{2}$.965 6502	62	.0257 1608	.410 2047
13	.0859 5496	.934 2709	63	.0254 7875	.406 1781
14	.0804 3771	.905 4597	64	.0252 4945	.402 2520
15	.0756 5898	.878 8605	65	.0250 2782	.398 4230
16	.0714 8031	.854 1864	66	.0248 1349	.394 6879
17	.0677 9580	.831 2029	67	.0246 0615	.391 0437
18	.0645 2309	.809 7152	68	.0244 0547	.387 4873
19	.0615 9715	.789 5607	69	.0242 1118	.384 0159
20	.0589 6597	.770 6016	70	.0240 2298	.380 6269
21	.0565 8744	.752 7200	71	.0238 4064	.377 3179
22	.0544 2709	.735 8151	72	.0236 6389	.374 0861
23	.0524 5648	.719 7991	73	.0234 9250	.370 9293
24	.0506 5188	.704 5955	74	.0233 2626	.367 8451
25	.0489 9336	.690 1373	75	.0231 6496	.364 8315
26	.0474 6408	.676 3651	76	.0230 0840	.361 8864
27	.0460 4967	.663 2265	77	.0228 5640	.359 0078
28	.0447 3781	.650 6747	78	.0227 0877	.356 1936
29	.0435 1790	.638 6680	79	.0225 6536	.353 4423
30	.0423 8075	.627 1686	80	.0224 2600	.350 7518
31	.0413 1834	.616 1429	81	.0222 9053	.348 1205
32	.0403 2366	.605 5599	82	.0221 5882	.345 5467
33	.0393 9055	.595 3920	83	.0220 3073	.343 0289
34	.0385 1357	.585 6138	84	.0219 0612	.340 5655
35	.0376 8791	.576 2021	85	.0217 8487	.338 1550
36	.0369 0931	.567 1359	86	.0216 6687	.335 7960
37	.0361 7393	.558 3957	87	.0215 5199	.333 4874
38	.0354 7837	.549 9637	88	.0214 4013	.331 2274
39	.0348 1955	.541 8232	89	.0213 3119	.329 0150
40	.0341 9472	.533 9591	90	.0212 2506	.326 8489
41	.0336 0139	.526 3574	91	.0211 2166	.324 7280
42	.0330 3732	.519 0048	92	.0210 2089	.322 6512
43	.0325 0045	.511 8894	93	.0209 2267	.320 6172
44	.0319 8893	.504 9997	94	.0208 2691	.318 6248
45	.0315 0106	.498 3251	95	.0207 3351	.316 6734
46	.0310 3530	.491 8559	96	.0206 4246	.314 7615
47	.0305 9025	.485 5830	97	.0205 5362	.312 8883
48	.0301 6460	.479 4975	98	.0204 6695	.311 0532
49	.0297 5716	.473 5915	99	.0203 8237	.309 2547
50	.0293 6684	.467 8572	100	.0202 9982	.307 4923

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0175 0000	0.007 5344	51	0.0298 0269	$\bar{2}$ 474 2555
2	0.5131 6295	$\bar{1}$.710 2553	52	.0294 4665	.469 0359
3	.3450 6747	.537 9040	53	.0291 0492	.463 9664
4	.2610 3237	.416 6943	54	.0287 7671	.459 0412
5	.2106 2142	.323 5026	55	.0284 6130	.454 2546
6	.1770 2256	.248 0286	56	.0281 5796	.449 6011
7	.1530 3059	.184 7783	57	.0278 6606	.445 0755
8	.1350 4292	.130 4718	58	.0275 8502	.440 6734
9	.1210 5813	.082 9940	59	.0273 1430	.436 3901
10	.1098 7535	.040 9003	60	.0270 5336	.432 2212
11	.1007 3038	.003 1604	61	.0268 0171	.428 1625
12	.0931 1377	$\bar{2}$.969 0139	62	.0265 5892	.424 2104
13	.0866 7283	.937 8829	63	.0263 2455	.420 3610
14	.0811 5562	.909 3186	64	0260 9821	.416 6107
15	.0763 7739	.882 9648	65	.0258 7952	.412 9562
16	.0721 9958	.858 5347	66	.0256 6813	.409 3942
17	.0685 1623	.835 7935	67	.0254 6372	.405 9218
18	.0652 4493	.814 5467	68	.0252 6596	.402 5358
19	.0623 2061	.794 6317	69	.0250 7458	.399 2337
20	.0596 9122	.775 9104	70	.0248 8929	.396 0125
21	.0573 1464	.758 2656	71	.0247 0985	.392 8702
22	.0551 5638	.741 5957	72	.0245 3599	.389 8037
23	.0531 8795	.725 8133	73	.0243 6749	.386 8108
24	.0513 8565	.710 8418	74	.0242 0413	.383 8895
25	.0497 2952	.696 6143	75	.0240 4570	.381 0374
26	.0482 0269	.683 0713	76	.0238 9200	.378 2525
27	.0467 9079	.670 1603	77	.0237 4284	.375 5326
28	.0454 8151	.657 8349	78	.0235 9806	.372 8763
29	.0442 6423	.646 0530	79	.0234 5748	.370 2814
30	.0431 2975	.634 7770	80	.0233 2093	.367 7459
31	.0420 7005	.623 9731	81	.0231 8827	.365 2683
32	.0410 7812	.613 6106	82	.0230 5936	.362 8473
33	.0401 4779	.603 6617	83	.0229 3406	.360 4809
34	.0392 7363	.594 1010	84	.0228 1223	.358 1678
35	.0384 5081	.584 9054	85	.0226 9375	.355 9063
36	.0376 7507	.576 0541	86	.0225 7849	.353 6949
37	.0369 4257	.567 5271	87	.0324 6636	.351 5328
38	.0362 4990	.559 3068	88	.0223 5724	.349 4182
39	.0355 9399	.551 3767	89	.0222 5102	.347 3499
40	.0349 7209	.543 7216	90	.0221 4760	.345 3267
41	.0343 8170	.536 3273	91	.0220 4690	.343 3475
42	.0338 2058	.529 1809	92	.0219 4882	.341 4112
43	.0332 8666	.522 2703	93	.0218 5327	.339 5165
44	.0327 7810	.515 5838	94	.0217 6017	.337 6623
45	.0322 9321	.509 1112	95	.0216 6944	.335 8477
46	.0318 3043	.502 8425	96	.0215 8101	.334 0718
47	.0313 8836	.496 7686	97	.0214 9480	.332 3334
48	.0309 6569	.490 8808	98	.0214 1075	.330 6319
49	.0305 6124	.485 1710	99	.0213 2876	.328 9656
50	.0301 7391	.479 6316	100	.0212 4879	.327 3342

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0187 5000	0.008 0676	51	0.0306 2472	$\bar{2}$.486 0721
2	0.5141 0604	$\bar{1}$.711 0527	52	.0302 7187	.481 0392
3	.3459 1073	.538 9640	53	.0299 3333	.476 1550
4	.2618 2758	.418 0154	54	.0296 0830	.471 4135
5	.2113 8930	.325 0831	55	.0292 9605	.466 8090
6	.1777 7345	.249 8669	56	.0289 9589	.462 3364
7	.1537 7040	.186 8727	57	.0287 0717	.457 9904
8	.1357 7537	.132 8210	58	.0284 2930	.453 7662
9	.1217 8566	.085 5962	59	.0281 6173	.449 6594
10	.1105 9969	.043 7538	60	.0279 0395	.445 6657
11	.1014 5278	.006 2640	61	.0276 5545	.441 7808
12	.0938 3518	$\bar{2}$.972 3658	62	.0274 1579	.438 0008
13	.0873 9396	.941 4814	63	.0271 8455	.434 3222
14	.0818 7704	.913 1621	64	.0269 6133	.430 7413
15	.0770 9955	.887 0519	65	.0267 4575	.427 2547
16	.0729 2285	.862 8636	66	.0265 3747	.423 8595
17	.0692 4091	.840 3628	67	.0263 3615	.420 5523
18	.0659 7127	.819 3549	68	.0261 4149	.417 3303
19	.0630 4882	.799 6769	69	.0259 5319	.414 1908
20	.0604 2148	.781 1914	70	.0257 7097	.411 1308
21	.0580 4709	.763 7805	71	.0255 9458	.408 1480
22	.0558 9116	.747 3431	72	.0254 2377	.405 2400
23	.0539 2517	.731 7916	73	.0252 5830	.402 4042
24	.0521 2540	.717 0494	74	.0250 9796	.399 6385
25	.0504 7188	.703 0495	75	.0249 4254	.396 9407
26	.0489 4775	.689 7327	76	.0247 9184	.394 3088
27	.0475 3861	.677 0465	77	.0246 4568	.391 7408
28	.0462 3215	.664 9441	78	.0245 0387	.389 2347
29	.0450 1773	.653 3836	79	.0243 6625	.386 7887
30	.0438 8616	.642 3276	80	.0242 3266	.384 4011
31	.0428 2941	.631 7421	81	.0241 0295	.382 0702
32	.0418 4046	.621 5965	82	.0239 7696	.379 7941
33	.0409 1314	.611 8628	83	.0238 5457	.377 5716
34	.0400 4202	.602 5160	84	.0237 3564	.375 4009
35	.0392 2227	.593 5327	85	.0236 2004	.373 2806
36	.0384 4961	.584 8919	86	.0235 0767	.371 2095
37	.0377 2021	.576 5741	87	.0233 9839	.369 1860
38	.0370 3066	.568 5614	88	.0232 9211	.367 2089
39	.0363 7788	.560 8374	89	.0231 8873	.365 2770
40	.0357 5914	.553 3871	90	.0230 8813	.363 3888
41	.0351 7190	.546 1959	91	.0229 9023	.361 5434
42	.0346 1393	.539 2509	92	.0228 9494	.359 7395
43	.0340 8318	.532 5401	93	.0228 0217	.357 9761
44	.0335 7781	.526 0523	94	.0227 1183	.356 2521
45	.0330 9611	.519 7769	95	.0226 2385	.354 5666
46	.0326 3651	.513 7037	96	.0225 3815	.352 9182
47	.0321 9763	.507 8239	97	.0224 5465	.351 3063
48	.0317 7815	.502 1285	98	.0223 7329	.349 7298
49	.0313 7689	.496 6098	99	.0222 9400	.348 1880
50	.0309 9275	.491 2601	100	.0222 1671	.346 6798

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0200 0000	0.008 6002	51	0.0314 5856	$\bar{2}$.497 7388
2	0.5150 4950	$\bar{1}$.711 8490	52	.0311 0909	.492 8873
3	.3467 5467	.540 0223	53	.0307 7392	.488 1828
4	.2626 2375	.419 3340	54	.0304 5226	.483 6196
5	.2121 5839	.326 6602	55	.0301 4337	.479 1918
6	.1785 2581	.251 7010	56	.0298 4657	.474 8944
7	.1545 1195	.188 9621	57	.0295 6120	.470 7220
8	.1365 0980	.135 1638	58	.0292 8667	.466 6700
9	.1225 1544	.088 1908	59	.0290 2243	.462 7338
10	.1113 2653	.046 5987	60	.0287 6797	.458 9093
11	.1021 7794	.009 3571	61	.0285 2278	.455 1919
12	.0945 5960	$\bar{2}$.975 7056	62	.0282 8643	.451 5782
13	.0881 1835	.945 0663	63	.0280 5848	.448 0642
14	.0826 0197	.916 9905	64	.0278 3855	.444 6466
15	.0778 2547	.891 1217	65	.0276 2624	.441 3218
16	.0736 5013	.867 1735	66	.0274 2122	.438 0868
17	.0699 6984	.844 9109	67	.0272 2316	.434 9385
18	.0667 0210	.824 1395	68	.0270 3173	.431 8738
19	.0637 8177	.804 6966	69	.0268 4655	.428 8901
20	.0611 5672	.786 4442	70	.0266 6765	.425 9847
21	.0587 8477	.769 2648	71	.0264 9446	.423 1550
22	.0566 3140	.753 0573	72	.0263 2683	.420 3986
23	.0546 6810	.737 7340	73	.0261 6454	.417 7131
24	.0528 7110	.723 2183	74	.0260 0736	.415 0963
25	.0512 2044	.709 4433	75	.0258 5508	.412 5459
26	.0496 9923	.696 3497	76	.0257 0751	.410 0601
27	.0482 9309	.683 8850	77	.0255 6447	.407 6367
28	.0469 8967	.672 0024	78	.0254 2576	.405 2739
29	.0457 7835	.660 6602	79	.0252 9123	.402 9699
30	.0446 4992	.649 8207	80	.0251 6071	.400 7229
31	.0435 9635	.639 4501	81	.0250 3405	.398 5311
32	.0426 1061	.629 5177	82	.0249 1110	.396 3929
33	.0416 8653	.619 9958	83	.0247 9173	.394 3069
34	.0408 1867	.610 8589	84	.0246 7581	.392 2714
35	.0400 0221	.602 0840	85	.0245 6321	.390 2851
36	.0392 3285	.593 6499	86	.0244 5381	.388 3465
37	.0385 0678	.585 5372	87	.0243 4750	.386 4544
38	.0378 2057	.577 7280	88	.0242 4416	.384 6072
39	.0371 7114	.570 2059	89	.0241 4370	.382 8038
40	.0365 5575	.562 9556	90	.0240 4602	.381 0431
41	.0359 7188	.555 9612	91	.0239 5101	.379 3239
42	.0354 1729	.549 2153	92	.0238 5859	.377 6448
43	.0348 8993	.542 7002	93	.0237 6368	.376 0050
44	.0343 8794	.536 4061	94	.0236 8118	.374 4034
45	.0339 0962	.530 3230	95	.0235 9602	.372 8388
46	.0334 5342	.524 4406	96	.0235 1313	.371 3104
47	.0330 1792	.518 7497	97	.0234 3242	.369 8172
48	.0326 0184	.513 2420	98	.0233 5383	.368 3582
49	.0322 0396	.507 9093	99	.0232 7730	.366 9325
50	.0318 2321	.502 7440	100	.0232 0274	.365 5393

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0225 0000	0.009 6033	51	0.0331 6102	$\bar{2}$.520 6279
2	0.5169 3758	$\bar{1}$.713 4381	52	.0328 1884	.516 1232
3	.3484 4458	.542 1337	53	.0324 9094	.511 7623
4	.2642 1893	.421 9639	54	.0321 7654	.507 5394
5	.2137 0022	.329 8050	55	.0318 7489	.503 4487
6	.1800 3496	.255 3568	56	.0315 8530	.499 4850
7	.1560 0025	.193 1253	57	.0313 0712	.495 6432
8	.1379 8462	.139 8307	58	.0310 3977	.491 9185
9	.1239 8170	.093 3576	59	.0307 8268	.488 3064
10	.1127 8768	.052 2617	60	.0305 3533	.484 8026
11	.1036 3649	.015 5127	61	.0302 9724	.481 4031
12	.0960 1740	$\bar{2}$.982 3500	62	.0300 6795	.478 1038
13	.0895 7686	.952 1958	63	.0298 4704	.474 9013
14	.0840 6230	.924 6013	64	.0296 3411	.471 7918
15	.0792 8852	.899 2103	65	.0294 2878	.468 7722
16	.0751 1663	.875 7361	66	.0292 3070	.465 8392
17	.0714 4039	.853 9438	67	.0290 3955	.462 9899
18	.0681 7720	.833 6392	68	.0288 5500	.460 2211
19	.0652 6182	.814 6592	69	.0286 7677	.457 5302
20	.0626 4207	.796 8661	70	.0285 0458	.454 9146
21	.0602 7572	.780 1423	71	.0283 3816	.452 3716
22	.0581 2821	.764 3869	72	.0281 7728	.449 8991
23	.0561 7097	.749 5119	73	.0280 2169	.447 4944
24	.0543 8023	.735 4410	74	.0278 7118	.445 1554
25	.0527 3599	.722 1071	75	.0277 2554	.442 8800
26	.0512 2134	.709 4509	76	.0275 8457	.440 6662
27	.0498 2188	.697 4201	77	.0274 4808	.438 5120
28	.0485 2525	.685 9679	78	.0273 1589	.436 4153
29	.0473 2081	.675 0522	79	.0271 8784	.434 3747
30	.0461 9934	.664 6357	80	.0270 6376	.432 3882
31	.0451 5280	.654 6847	81	.0269 4350	.430 4541
32	.0441 7415	.645 1682	82	.0268 2692	.428 5708
33	.0432 5722	.636 0586	83	.0267 1387	.426 7369
34	.0423 9655	.627 3305	84	.0266 0423	.424 9508
35	.0415 8731	.618 9608	85	.0264 9787	.423 2110
36	.0408 2522	.610 9285	86	.0263 9467	.421 5163
37	.0401 0643	.603 2140	87	.0262 9452	.419 8653
38	.0394 2753	.595 7996	88	.0261 9730	.418 2566
39	.0387 8543	.588 6687	89	.0261 0291	.416 6890
40	.0381 7738	.581 8061	90	.0260 1126	.415 1613
41	.0376 0087	.575 1979	91	.0259 2224	.413 6726
42	.0370 5364	.568 8309	92	.0258 3577	.412 2214
43	.0365 3364	.562 6929	93	.0257 5176	.410 8069
44	.0360 3901	.556 7728	94	.0256 7012	.409 4279
45	.0355 6805	.551 0601	95	.0255 9078	.408 0836
46	.0351 1921	.545 5447	96	.0255 1366	.406 7728
47	.0346 9107	.540 2177	97	.0254 3868	.405 4946
48	.0342 8233	.535 0703	98	.0253 6578	.404 2483
49	.0338 9179	.530 0945	99	.0252 9489	.403 0328
50	.0335 1836	.525 2828	100	.0252 2594	.401 8473

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0250 0000	0.010 7239	51	0.0349 0870	$\bar{2}$.542 9336
2	0.5188 2716	$\bar{1}$.715 0227	52	.0345 7446	.538 7555
3	.3501 3717	.544 2383	53	.0342 5449	.534 7176
4	.2658 1788	.424 5842	54	.0339 4799	.530 8140
5	.2152 4686	.332 9368	55	.0336 5419	.527 0392
6	.1815 4997	.258 9962	56	.0333 7243	.523 3878
7	.1574 9543	.197 2680	57	.0331 0204	.519 8548
8	.1394 6735	.144 4726	58	.0328 4244	.516 4354
9	.1254 5689	.098 4945	59	.0325 9307	.513 1252
10	.1142 5877	.057 8895	60	.0323 5340	.509 9199
11	.1051 0596	.021 6273	61	.0321 2294	.506 8153
12	.0974 8713	$\bar{2}$.988 9473	62	.0319 0126	.503 8078
13	.0910 4827	.959 2717	63	.0316 8790	.500 8934
14	.0855 3653	.932 1516	64	.0314 8249	.498 0690
15	.0807 6646	.907 2311	65	.0312 8463	.495 3310
16	.0765 9899	.884 2230	66	.0310 9398	.492 6763
17	.0729 2777	.862 8929	67	.0309 1021	.490 1020
18	.0696 7008	.843 0463	68	.0307 3300	.487 6050
19	.0667 6062	.824 5204	69	.0305 6206	.485 1827
20	.0641 4713	.807 1772	70	.0303 9712	.482 8324
21	.0617 8733	.790 8994	71	.0302 3790	.480 5517
22	.0596 4660	.775 5857	72	.0300 8417	.478 3380
23	.0576 9638	.761 1485	73	.0299 3568	.476 1891
24	.0559 1282	.747 5114	74	.0297 9222	.474 1029
25	.0542 7592	.734 6072	75	.0296 5358	.472 0772
26	.0527 6875	.722 3768	76	.0295 1956	.470 1099
27	.0513 7687	.710 7677	77	.0293 8997	.468 1991
28	.0500 8793	.699 7331	78	.0292 6463	.466 3431
29	.0488 9127	.689 2313	79	.0291 4338	.464 5399
30	.0477 7764	.679 2247	80	.0290 2605	.462 7879
31	.0467 3900	.669 6794	81	.0289 1248	.461 0853
32	.0457 6831	.660 5649	82	.0288 0254	.459 4308
33	.0448 5938	.651 8533	83	.0286 9608	.457 8226
34	.0440 0675	.643 5193	84	.0285 9298	.456 2594
35	.0432 0558	.635 5399	85	.0284 9310	.454 7397
36	.0424 5158	.627 8939	86	.0283 9633	.453 2623
37	.0417 4090	.620 5618	87	.0283 0255	.451 8256
38	.0410 7012	.613 5259	88	.0282 1165	.450 4285
39	.0404 3615	.606 7698	89	.0281 2353	.449 0699
40	.0398 3623	.600 2783	90	.0280 3809	.447 7484
41	.0392 6786	.594 0372	91	.0279 5523	.446 4631
42	.0387 2876	.588 0336	92	.0278 7486	.445 2127
43	.0382 1688	.582 2553	93	.0277 9690	.443 9964
44	.0377 3037	.576 6911	94	.0277 2126	.442 8129
45	.0372 6752	.571 3306	95	.0276 4786	.441 6615
46	.0368 2676	.566 1635	96	.0275 7662	.440 5410
47	.0364 0669	.561 1812	97	.0275 0747	.439 4507
48	.0360 0599	.556 3748	98	.0274 4034	.438 3895
49	.0356 2348	.551 7364	99	.0273 7517	.437 3568
50	.0352 5806	.547 2584	100	.0273 1188	.436 3516

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0275 0000	0.011 7818	51	0.0367 0014	$\bar{2}$.564 6678
2	0.5207 1825	$\bar{1}$.716 6028	52	.0363 7444	.560 7964
3	.3518 3243	.546 3359	53	.0360 6297	.557 0615
4	.2674 2059	.427 1949	54	.0357 6491	.553 4571
5	.2167 9832	.336 0559	55	.0354 7953	.549 9778
6	.1830 7083	.262 6192	56	.0352 0612	.546 6181
7	.1589 9748	.201 3902	57	.0349 4404	.543 3731
8	.1409 5795	.149 0896	58	.0346 9270	.540 2381
9	.1269 4095	.103 6017	59	.0344 5153	.537 2085
10	.1157 3972	.063 4824	60	.0342 2002	.534 2802
11	.1065 8629	.027 7014	61	.0339 9767	.531 4491
12	.0989 6871	$\bar{2}$.995 4979	62	.0337 8403	.528 7114
13	.0925 3252	.966 2944	63	.0335 7866	.526 0634
14	.0870 2457	.939 6419	64	.0333 8118	.523 5017
15	.0822 5917	.915 1844	65	.0331 9120	.521 0230
16	.0780 9709	.892 6351	66	.0330 0837	.518 6241
17	.0744 3186	.871 7589	67	.0328 3236	.516 3021
18	.0711 8063	.852 3618	68	.0326 6285	.514 0541
19	.0682 7802	.834 2809	69	.0324 9955	.511 8774
20	.0656 7173	.817 3785	70	.0323 4218	.509 7693
21	.0633 1941	.801 5369	71	.0321 9048	.507 7275
22	.0611 8640	.786 6549	72	.0320 4420	.505 7495
23	.0592 4410	.772 6451	73	.0319 0311	.503 8330
24	.0574 6863	.759 4309	74	.0317 6698	.501 9759
25	.0558 3997	.746 9452	75	.0316 3560	.500 1761
26	.0543 4116	.735 1289	76	.0315 0878	.498 4316
27	.0529 5776	.723 9296	77	.0313 8633	.496 7405
28	.0516 7738	.713 3005	78	.0312 6806	.495 1010
29	.0504 8935	.703 1998	79	.0311 5382	.493 5112
30	.0493 8442	.693 5900	80	.0310 4342	.491 9696
31	.0483 5453	.684 4372	81	.0309 3674	.490 4745
32	.0473 9263	.675 7108	82	.0308 3361	.489 0244
33	.0464 9253	.667 3832	83	.0307 3389	.487 6176
34	.0456 4875	.659 4289	84	.0306 3747	.486 2528
35	.0448 5645	.651 8248	85	.0305 4420	.484 9287
36	.0441 1132	.644 5500	86	.0304 5397	.483 6440
37	.0434 0953	.637 5851	87	.0303 6667	.482 3972
38	.0427 4764	.630 9121	88	.0302 8219	.481 1872
39	.0421 2256	.624 5147	89	.0302 0041	.480 0129
40	.0415 3151	.618 3777	90	.0301 2125	.478 8730
41	.0409 7200	.612 4872	91	.0300 4460	.477 7664
42	.0404 4175	.606 8299	92	.0299 7038	.476 6923
43	.0399 3871	.601 3940	93	.0298 9850	.475 6494
44	.0394 6100	.596 1681	94	.0298 2887	.474 6368
45	.0390 0693	.591 1417	95	.0297 6141	.473 6535
46	.0385 7493	.586 3051	96	.0296 9605	.472 6987
47	.0381 6358	.581 6491	97	.0296 3272	.471 7715
48	.0377 7158	.577 1651	98	.0295 7134	.470 8710
49	.0373 9773	.572 8452	99	.0295 1185	.469 9964
50	.0370 4092	.568 6818	100	.0294 5418	.469 1469

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0300 0000	0.012 8372	51	.0385 3382	$\bar{2}$.585 8421
2	0.5226 1084	$\bar{1}$.718 1784	52	.0382 1718	.582 2586
3	.3535 3036	.548 4267	53	.0379 1471	.578 8078
4	.2690 2705	.429 7959	54	.0376 2558	.575 4832
5	.2183 5457	.339 1623	55	.0373 4907	.572 2798
6	.1845 9750	.266 2258	56	.0370 8447	.569 1922
7	.1605 0635	.205 4922	57	.0368 3114	.566 2152
8	.1424 5639	.153 6819	58	.0365 8848	.563 3442
9	.1284 3386	.108 6795	59	.0363 5593	.560 5753
10	.1172 3051	.069 0407	60	.0361 3296	.557 9035
11	.1080 7745	.033 7351	61	.0359 1908	.555 3253
12	.1004 6209	.002 0022	62	.0357 1385	.552 8367
13	.0940 2954	$\bar{2}$.973 2643	63	.0355 1682	.550 4341
14	.0885 2634	.947 0725	64	.0353 2760	.548 1142
15	.0837 6658	.923 0708	65	.0351 4581	.545 8736
16	.0796 1085	.900 9723	66	.0349 7110	.543 7093
17	.0759 5253	.880 5422	67	.0348 0313	.541 6183
18	.0727 0870	.861 5864	68	.0346 4159	.539 5978
19	.0698 1388	.843 9418	69	.0344 8618	.537 6451
20	.0672 1571	.827 4708	70	.0343 3663	.535 7576
21	.0648 7178	.812 0558	71	.0341 9266	.533 9329
22	.0627 4739	.797 5957	72	.0340 5404	.532 1686
23	.0608 1390	.784 0029	73	.0339 2053	.530 4627
24	.0590 4742	.771 2009	74	.0337 9191	.528 8127
25	.0574 2787	.759 1227	75	.0336 6796	.527 2168
26	.0559 3829	.747 7092	76	.0335 4849	.525 6730
27	.0545 6421	.736 9079	77	.0334 3331	.324 1794
28	.0532 9323	.726 6720	78	.0333 2224	.522 7361
29	.0521 1467	.716 9600	79	.0332 1510	.521 3356
30	.0510 1926	.707 7341	80	.0331 1175	.519 9821
31	.0499 9893	.698 9607	81	.0330 1201	.518 6720
32	.0490 4662	.690 6091	82	.0329 1576	.517 4038
33	.0481 5612	.682 6515	83	.0328 2284	.516 1761
34	.0473 2196	.675 0627	84	.0327 3313	.514 9876
35	.0465 3929	.667 8198	85	.0326 4650	.513 8367
36	.0458 0379	.660 9015	86	.0325 6284	.512 7222
37	.0451 1162	.654 2885	87	.0324 8202	.511 6430
38	.0444 5934	.647 9630	88	.0324 0393	.310 5977
39	.0438 4385	.641 9086	89	.0323 2848	.509 5853
40	.0432 6238	.636 1104	90	.0322 5556	.508 6046
41	.0427 1241	.630 5541	91	.0321 8508	.507 6546
42	.0421 9168	.625 2268	92	.0321 1694	.506 7342
43	.0416 9811	.620 1163	93	.0320 5107	.505 8425
44	.0412 2985	.615 2117	94	.0319 8737	.504 9785
45	.0407 8518	.610 5023	95	.0319 2577	.504 1414
46	.0403 6254	.605 9785	96	.0318 6619	.503 3302
47	.0399 6051	.601 6310	97	.0318 0856	.502 5440
48	.0395 7777	.597 4514	98	.0317 5281	.501 7822
49	.0392 1314	.593 4316	99	.0316 9886	.501 0437
50	.0388 6550	.589 5642	100	.0316 4667	.500 3280

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0325 0000	0.013 8901	51	0.0404 0817	$\bar{2}$.606 4692
2	0.5245 0492	$\bar{1}$.719 7496	52	.0401 0103	.603 1555
3	.3552 3095	.550 5108	53	.0398 0797	.599 9700
4	.2706 3724	.432 3876	54	.0395 2819	.596 9069
5	.2199 1560	.342 2560	55	.0392 6095	.593 9607
6	.1861 2997	.269 8163	56	.0390 0553	.591 1262
7	.1620 2204	.209 5741	57	.0387 6131	.588 3984
8	.1439 6263	.158 2498	58	.0385 2767	.585 7728
9	.1299 3555	.113 7280	59	.0383 0405	.583 2447
10	.1187 3107	.074 5643	60	.0380 8993	.580 8102
11	.1095 7936	.039 7287	61	.0378 8482	.578 4652
12	.1019 6719	.008 4604	62	.0376 8827	.576 2062
13	.0955 3925	$\bar{2}$.980 1818	63	.0374 9983	.574 0293
14	.0900 4176	.954 4439	64	.0373 1912	.571 9313
15	.0852 8858	.930 8908	65	.0371 4574	.569 9090
16	.0811 4013	.909 2357	66	.0369 7936	.567 9593
17	.0774 8966	.889 2438	67	.0368 1962	.566 0792
18	.0742 5415	.870 7207	68	.0366 6622	.564 2661
19	.0713 6804	.853 5037	69	.0365 1886	.562 5172
20	.0687 7889	.837 4551	70	.0363 7727	.560 8301
21	.0664 4424	.822 4573	71	.0362 4118	.559 2023
22	.0643 2936	.808 4092	72	.0361 1033	.557 6315
23	.0624 0555	.795 2232	73	.0359 8451	.556 1156
24	.0606 4891	.782 8230	74	.0358 6347	.554 6523
25	.0590 3933	.771 1414	75	.0357 4702	.553 2398
26	.0575 5981	.760 1194	76	.0356 3496	.551 8762
27	.0561 9588	.749 7045	77	.0355 2709	.550 5596
28	.0549 3512	.739 8500	78	.0354 2323	.549 2882
29	.0537 6683	.730 5144	79	.0353 2322	.548 0603
30	.0526 8172	.721 6599	80	.0352 2690	.546 8746
31	.0516 7172	.713 2529	81	.0351 3411	.545 7289
32	.0507 2976	.705 2628	82	.0350 4471	.544 6224
33	.0498 4961	.697 6618	83	.0349 5855	.543 5534
34	.0490 2581	.690 4248	84	.0348 7550	.542 5205
35	.0482 5348	.683 5286	85	.0347 9545	.541 5224
36	.0475 2831	.676 9524	86	.0347 1826	.540 5579
37	.0468 4645	.670 6767	87	.0346 4383	.539 6259
38	.0462 0445	.664 6837	88	.0345 7205	.538 7251
39	.0455 9920	.658 9573	89	.0345 0281	.537 8545
40	.0450 2794	.653 4821	90	.0344 3601	.537 0128
41	.0444 8814	.648 2442	91	.0343 7156	.536 1993
42	.0439 7753	.643 2307	92	.0343 0937	.535 4128
43	.0434 9403	.638 4297	93	.0342 4935	.534 6523
44	.0430 3579	.633 8298	94	.0341 9142	.533 9171
45	.0426 0109	.629 4206	95	.0341 3550	.533 2063
46	.0421 8835	.625 1925	96	.0340 8151	.532 5189
47	.0417 9616	.621 1363	97	.0340 2939	.531 8541
48	.0414 2320	.617 2436	98	.0339 7906	.531 2114
49	.0410 6828	.613 5065	99	.0339 3045	.530 5896
50	.0407 3028	.609 9173	100	.0338 8351	.529 9883

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0350 0000	0.014 9403	51	0.0423 2156	$\bar{2}$.626 5617
2	0.5264 0049	$\bar{1}$.721 3163	52	.0420 2428	.623 5003
3	.3569 3418	.552 5881	53	.0417 4100	.620 5628
4	.2722 5114	.434 9697	54	.0414 7090	.617 7435
5	.2214 8137	.345 3372	55	.0412 1323	.615 0366
6	.1876 6821	.273 3907	56	.0409 6730	.612 4373
7	.1635 4449	.213 6359	57	.0407 3245	.609 9406
8	.1454 7665	.162 7932	58	.0405 0810	.607 5419
9	.1314 4601	.118 7474	59	.0402 9366	.605 2367
10	.1202 4137	.080 0539	60	.0400 8862	.603 0211
11	.1110 9197	.045 6827	61	.0398 9249	.600 8911
12	.1034 8395	.014 8730	62	.0397 0480	.598 8430
13	.0970 6157	$\bar{2}$.987 0474	63	.0395 2513	.596 8733
14	.0915 7073	.961 7567	64	.0393 5308	.594 9787
15	.0868 2507	.938 6452	65	.0391 8826	.593 1560
16	.0826 8483	.917 4258	66	.0390 3031	.591 4020
17	.0790 4313	.897 8642	67	.0388 7892	.589 7142
18	.0758 1684	.879 7657	68	.0387 3375	.588 0895
19	.0729 4033	.862 9678	69	.0385 9453	.586 5257
20	.0703 6108	.847 3325	70	.0384 6095	.585 0201
21	.0680 3659	.832 7426	71	.0383 3277	.583 5702
22	.0659 3207	.819 0967	72	.0382 0973	.582 1740
23	.0640 1880	.806 3076	73	.0380 9160	.580 8292
24	.0622 7283	.794 2986	74	.0379 7816	.579 5339
25	.0606 7404	.783 0029	75	.0378 6919	.578 2860
26	.0592 0540	.772 3613	76	.0377 6450	.577 0838
27	.0578 5241	.762 3215	77	.0376 6390	.575 9253
28	.0566 0265	.752 8367	78	.0375 6721	.574 8089
29	.0554 4538	.743 8654	79	.0374 7426	.573 7331
30	.0543 7133	.735 3699	80	.0373 8489	.572 6961
31	.0533 7240	.727 3167	81	.0372 9894	.571 6965
32	.0524 4150	.719 6752	82	.0372 1628	.570 7329
33	.0515 7242	.712 4175	83	.0371 3676	.569 8039
34	.0507 5966	.705 5187	84	.0370 6025	.568 9083
35	.0499 9835	.698 9557	85	.0369 8662	.568 0446
36	.0492 8416	.692 7074	86	.0369 1576	.567 2118
37	.0486 1325	.686 7546	87	.0368 4756	.566 4087
38	.0479 8214	.681 0796	88	.0367 8190	.565 6341
39	.0473 8775	.675 6661	89	.0367 1868	.564 8871
40	.0468 2728	.670 4989	90	.0366 5781	.564 1665
41	.0462 9822	.665 5643	91	.0365 9919	.563 4714
42	.0457 9828	.660 8492	92	.0365 4273	.562 8009
43	.0453 2539	.656 3416	93	.0364 8834	.562 1541
44	.0448 7768	.652 0304	94	.0364 3594	.561 5300
45	.0444 5343	.647 9053	95	.0363 8546	.560 9279
46	.0440 5108	.643 9566	96	.0363 3682	.560 3469
47	.0436 6919	.640 1752	97	.0362 8995	.559 7864
48	.0433 0646	.636 5527	98	.0362 4478	.559 2454
49	.0429 6167	.633 0811	99	.0362 0124	.558 7235
50	.0426 3371	.629 7531	100	.0361 5927	.558 2196

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0375 0000	0.015 9881	51	0.0442 7235	$\bar{2}$.646 1325
2	0.5282 9755	$\bar{1}$.722 8786	52	,0439 8523	.643 3069
3	.3586 4005	.554 6588	53	.0437 1199	.640 6006
4	.2738 6875	.437 5425	54	.0434 5183	.638 0081
5	.2230 5188	.348 4059	55	.0432 0398	.635 5238
6	.1892 1220	.276 9492	56	.0429 6775	.633 1426
7	.1650 7370	.217 6779	57	.0427 4249	.630 8599
8	.1469 9839	.167 3126	58	.0425 2760	.628 6709
9	.1329 6517	.123 7379	59	.0423 2251	.626 5714
10	.1217 6134	.085 5094	60	.0421 2670	.624 5574
11	.1126 1522	.051 5971	61	.0419 3968	.622 6250
12	.1050 1231	.021 2402	62	.0417 6097	.620 7705
13	.0985 9642	$\bar{2}$.993 8612	63	.0415 9016	.618 9906
14	.0931 1317	.969 0111	64	.0414 2684	.617 2818
15	.0883 7595	.946 3340	65	.0412 7063	.615 6411
16	.0842 4483	.925 5432	66	.0411 2118	.614 0656
17	.0806 1280	.906 4040	67	.0409 7816	.612 5526
18	.0773 9662	.888 7220	68	.0408 4124	.611 0989
19	.0745 3057	.872 3345	69	.0407 1013	.609 7026
20	.0719 6208	.857 1038	70	.0405 8456	.608 3609
21	.0696 4861	.842 9125	71	.0404 6426	.607 0715
22	.0675 5530	.829 6595	72	.0403 4898	.605 8325
23	.0656 5340	.817 2572	73	.0402 3848	.604 6416
24	.0639 1890	.805 6293	74	.0401 3255	.603 4967
25	.0623 3169	.794 7089	75	.0400 3098	.602 3962
26	.0608 7470	.784 4369	76	.0399 3356	.601 3380
27	.0595 3342	.774 7609	77	.0398 4011	.600 3205
28	.6582 9540	.765 6343	78	.0397 5045	.599 3421
29	.0571 4991	.757 0155	79	.0396 6442	.598 4011
30	.0560 8763	.748 8670	80	.0395 8184	.597 4960
31	.0551 0046	.741 1552	81	.0395 0257	.596 6254
32	.0541 8131	.733 8495	82	.0394 2647	.595 7879
33	.0533 2395	.726 9223	83	.0393 5340	.594 9822
34	.0525 2287	.720 3485	84	.0392 8323	.594 2071
35	.0517 7320	.714 1050	85	.0392 1582	.593 4613
36	.0510 7060	.708 1710	86	.0391 5107	.592 7437
37	.0504 1122	.702 5272	87	.0390 8887	.592 0531
38	.0497 9159	.697 1560	88	.0390 2910	.591 3885
39	.0492 0860	.692 0410	89	.0389 7166	.590 7489
40	.0486 5946	.687 1673	90	.0389 1646	.590 1333
41	.0481 4165	.682 5209	91	.0388 6340	.589 5408
42	.0476 5287	.678 0890	92	.0388 1239	.588 9705
43	.0471 9106	.673 8597	93	.0387 6336	.588 4214
44	.0467 5434	.669 8219	94	.0387 1622	.587 8929
45	.0463 4098	.665 9652	95	.0386 7089	.587 3841
46	.0459 4943	.662 2801	96	.0386 2729	.586 8942
47	.0455 7824	.658 7575	97	.0385 8537	.586 4226
48	.0452 2610	.655 3891	98	.0385 4505	.585 9686
49	.0448 9179	.652 1669	99	.0385 0626	.585 5313
50	.0445 7422	.649 0837	100	.0384 6895	.585 1103

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0400 0000	0.017 0333	51	0.0462 5885	$\bar{2}$.665 1948
2	0.5301 9608	$\bar{1}$.724 4365	52	.0459 8212	.662 5890
3	.3603 4854	.556 7228	53	.0457 1915	.660 0981
4	.2754 9005	.440 1059	54	.0454 6910	.657 7164
5	.2246 2711	.351 4622	55	.0452 3124	.655 4385
6	.1907 6190	.280 4916	56	.0450 0487	.653 2596
7	.1665 0961	.221 7001	57	.0447 8932	.651 1745
8	.1485 2783	.171 8078	58	.0445 8401	.649 1791
9	.1344 9299	.128 6997	59	.0443 8836	.647 2691
10	.1232 9094	.090 9312	60	.0442 0185	.645 4404
11	.1141 4904	.057 4723	61	.0440 2398	.643 6893
12	.1065 5217	.027 5623	62	.0438 5430	.642 0122
13	.1001 4373	.000 6238	63	.0436 9237	.640 4056
14	.0946 6897	$\bar{2}$.976 2077	64	.0435 3780	.638 8664
15	.0899 4110	.953 9582	65	.0433 9019	.637 3916
16	.0858 2000	.933 5885	66	.0432 4921	.635 9782
17	.0821 9852	.914 8640	67	.0431 1451	.634 6235
18	.0789 9333	.897 5904	68	.0429 8578	.633 3248
19	.0761 3862	.881 6050	69	.0428 6272	.632 0797
20	.0735 8175	.866 7702	70	.0427 4506	.630 8859
21	.0712 8011	.852 9584	71	.0426 3253	.629 7411
22	.0691 9881	.840 0986	72	.0425 2489	.628 6432
23	.0673 0906	.828 0735	73	.0424 2190	.627 5901
24	.0655 8683	.816 8166	74	.0423 2334	.626 5799
25	.0640 1196	.806 2612	75	.0422 2900	.625 6108
26	.0625 6738	.796 3480	76	.0421 3869	.624 6809
27	.0612 3854	.787 0248	77	.0420 5221	.623 7889
28	.0600 1298	.778 2452	78	.0419 6939	.622 9326
29	.0588 7993	.769 9673	79	.0418 9007	.622 1111
30	.0578 3010	.762 1540	80	.0418 1408	.621 3225
31	.0568 5535	.754 7714	81	.0417 4127	.620 5656
32	.0559 4859	.747 7892	82	.0416 7150	.619 8391
33	.0551 0357	.741 1797	83	.0416 0463	.619 1416
34	.0543 1477	.734 9180	84	.0415 4054	.618 4721
35	.0535 7732	.728 9810	85	.0414 7909	.617 8292
36	.0528 8688	.723 3480	86	.0414 2018	.617 2120
37	.0522 3956	.717 9995	87	.0413 6370	.616 6194
38	.0516 3192	.712 9183	88	.0413 0953	.616 0503
39	.0510 6083	.708 0879	89	.0412 5758	.615 5038
40	.0505 2349	.703 4933	90	.0412 0775	.614 9789
41	.0500 1738	.699 1209	91	.0411 5995	.614 4748
42	.0495 4020	.694 9578	92	.0411 1410	.613 9908
43	.0490 8989	.690 9920	93	.0410 7010	.613 5258
44	.0486 6454	.687 2127	94	.0410 2789	.613 0791
45	.0482 6246	.683 6094	95	.0409 8738	.612 6501
46	.0478 8205	.680 1727	96	.0409 4850	.612 2380
47	.0475 2189	.676 8937	97	.0409 1119	.611 8421
48	.0471 8065	.673 7639	98	.0408 7538	.611 4618
49	.0468 5712	.670 7756	99	.0408 4100	.611 0964
50	.0465 5020	.667 9216	100	.0408 0800	.610 7453

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0425 0000	0.018 0761	51	0.0482 7940	$\bar{2}$.683 7619
2	0.5320 9608	$\bar{1}$.725 9901	52	.0480 1322	.681 3608
3	.3620 5965	.558 7801	53	.0477 6064	.679 0702
4	.2771 1502	.442 6601	54	.0475 2084	.676 8842
5	.2262 0704	.354 5062	55	.0472 9307	.674 7975
6	.1923 1731	.284 0184	56	.0470 7663	.672 8054
7	.1681 5221	.225 7026	57	.0468 7086	.670 9029
8	.1500 6493	.176 2792	58	.0466 7517	.669 0858
9	.1360 2944	.133 6329	59	.0464 8899	.667 3501
10	.1248 3012	.096 3194	60	.0463 1178	.665 6914
11	.1156 9338	.063 3085	61	.0461 4306	.664 1064
12	.1081 0349	.033 3397	62	.0459 8237	.662 5914
13	.1017 0340	.007 3355	63	.0458 2929	.661 1432
14	.0962 3806	$\bar{2}$.983 3469	64	.0456 8340	.659 7584
15	.0915 2043	.961 5180	65	.0455 4432	.658 4343
16	.0874 1022	.941 5622	66	.0454 1171	.657 1679
17	.0838 0016	.923 2448	67	.0452 8523	.655 9566
18	.0806 0681	.906 3717	68	.0451 6456	.654 7978
19	.0777 6427	.890 7801	69	.0450 4942	.653 6802
20	.0752 1983	.876 3324	70	.0449 3952	.652 6284
21	.0729 3083	.862 9112	71	.0448 3460	.651 6133
22	.0708 6234	.850 4155	72	.0447 3442	.650 6418
23	.0689 8552	.838 7580	73	.0446 3875	.649 7121
24	.0672 7631	.827 8622	74	.0445 4736	.648 8220
25	.0657 1452	.817 6613	75	.0444 6004	.647 9699
26	.0642 8306	.808 0965	76	.0443 7660	.647 1540
27	.0629 6736	.799 1155	77	.0442 9687	.646 3730
28	.0617 5493	.790 6716	78	.0442 2065	.645 6251
29	.0606 3500	.782 7234	79	.0441 4778	.644 9089
30	.0595 9825	.775 2336	80	.0440 7811	.644 2230
31	.0586 3654	.768 1683	81	.0440 1149	.643 5661
32	.0577 4276	.761 4975	82	.0439 4777	.642 9368
33	.0569 1065	.755 1936	83	.0438 8682	.642 3341
34	.0561 3469	.749 2313	84	.0438 2852	.641 7569
35	.0554 0999	.743 5880	85	.0437 7274	.641 2037
36	.0547 3221	.738 2430	86	.0437 1936	.640 6738
37	.0540 9745	.733 1768	87	.0436 6828	.640 1661
38	.0535 0226	.728 3721	88	.0436 1940	.639 6797
39	.0529 4350	.723 8126	89	.0435 7261	.639 2136
40	.0524 1838	.719 4836	90	.0435 2783	.638 7670
41	.0519 2437	.715 3712	91	.0434 8496	.638 3391
42	.0514 5918	.711 4629	92	.0434 4391	.637 9289
43	.0510 2071	.707 7466	93	.0434 0461	.637 5358
44	.0506 0708	.704 2113	94	.0433 6698	.637 1592
45	.0502 1657	.700 8471	95	.0433 3094	.636 7981
46	.0498 4760	.697 6442	96	.0432 9643	.636 4521
47	.0494 9873	.694 5941	97	.0432 6338	.636 1204
48	.0491 6864	.691 6882	98	.0432 3173	635 8026
49	.0488 5611	.688 9189	99	.0432 0140	.635 4978
50	.0485 6005	.686 2791	100	.0431 7236	.635 2058

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0450 0000	0.019 1163	51	0.0503 3232	$\bar{2}$.701 8469
2	0.5339 9756	$\bar{1}$.727 5393	52	.0500 7679	.699 6365
3	.3637 7336	.560 8309	53	.0498 3469	.697 5317
4	.2787 4365	.445 2050	54	.0496 0519	.695 5271
5	.2277 9164	.357 5378	55	.0493 8754	.693 6174
6	.1938 7839	.287 5294	56	.0491 8105	.691 7978
7	.1697 0147	.229 6856	57	.0489 8506	.690 0637
8	.1516 0965	.180 7268	58	.0487 9897	.688 4106
9	.1375 7447	.138 5379	59	.0486 2221	.686 8347
10	.1263 7882	.101 6743	60	.0484 5426	.685 3319
11	.1172 4818	.069 1061	61	.0482 9462	.683 8987
12	.1096 6619	.040 0727	62	.0481 4284	.682 5316
13	.1032 7535	.013 9967	63	.0479 9848	.681 2274
14	0978 2032	$\bar{2}$.990 4291	64	.0478 6115	.679 9831
15	.0931 1381	.969 0141	65	.0477 3047	.678 7957
16	.0890 1537	.949 4650	66	.0476 0608	.677 6624
17	.0854 1758	.931 5473	67	.0474 8765	.676 5807
18	.0822 3690	.915 0667	68	.0473 7487	.675 5480
19	.0794 0734	.899 8607	69	.0472 6745	.674 5622
20	.0768 7614	.885 7916	70	.0471 6511	.673 6209
21	.0746 0057	.872 7421	71	.0470 6759	.672 7220
22	.0725 4565	.860 6113	72	.0469 7465	.671 8636
23	.0706 8249	.849 3118	73	.0468 8606	.671 0437
24	.0689 8703	.838 7674	74	.0468 0159	.670 2606
25	.0674 3903	.828 9113	75	.0467 2104	.669 5125
26	.0660 2137	.819 6846	76	.0466 4422	.668 7978
27	.0647 1946	.811 0349	77	.0465 7094	.668 1151
28	.0635 2081	.802 9160	78	.0465 0104	.667 4627
29	.0624 1461	.795 2863	79	.0464 3434	.666 8393
30	.0613 9154	.788 1085	80	.0463 7069	.666 2436
31	.0604 4345	.781 3492	81	.0463 0995	.665 6743
32	.0595 6320	.774 9781	82	.0462 5197	.665 1302
33	.0587 4453	.768 9674	83	.0461 9662	.664 6102
34	.0579 8191	.763 2926	84	.0461 4379	.664 1132
35	.0572 7045	.757 9306	85	.0460 9334	.663 6381
36	.0566 0578	.752 8608	86	.0460 4516	.663 1840
37	.0559 8402	.748 0641	87	.0459 9915	.662 7498
38	.0554 0169	.743 5230	88	.0459 5522	.662 3348
39	.0548 5567	.739 2214	89	.0459 1325	.661 9380
40	.0543 4315	.735 1448	90	.0458 7316	.661 5586
41	.0538 6158	.731 2791	91	.0458 3486	.661 1959
42	.0534 0868	.727 6118	92	.0457 9827	.660 8491
43	.0529 8235	.724 1312	93	.0457 6331	.660 5174
44	.0525 8071	.720 8264	94	.0457 2991	.660 2004
45	.0522 0202	.717 6873	95	.0456 9799	.659 8971
46	.0518 4471	.714 7045	96	.0456 6749	.659 6071
47	.0515 0734	.711 8691	97	.0456 3834	.659 3298
48	.0511 8858	.709 1731	98	.0456 1048	.659 0646
49	.0508 8722	.706 6087	99	.0455 8385	.658 8110
50	.0506 0215	.704 1690	100	.0455 5839	.658 5685

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0475 0000	0.020 1540	51	0.0524 1595	$\bar{2}$.719 4635
2	0.5359 0049	$\bar{1}$.729 0842	52	.0521 7111	.717 4301
3	.3654 8967	.562 8751	53	.0519 3950	.715 4978
4	.2803 7592	.447 7406	54	.0517 2030	.713 6310
5	.2293 8090	.360 5572	55	.0515 1276	.711 9148
6	.1954 4512	.291 0249	56	.0513 1618	.710 2544
7	.1712 5735	.233 6492	57	.0511 2991	.708 6750
8	.1531 6196	.185 1509	58	.0509 5334	.707 1727
9	.1391 2803	.143 4146	59	.0507 8591	.705 7432
10	.1279 3700	.106 9961	60	.0506 2709	.704 3830
11	.1188 1337	.074 8653	61	.0504 7641	.703 0884
12	.1112 4018	.046 2617	62	.0503 3339	.701 8562
13	.1048 5950	.020 6078	63	.0501 9761	.700 6830
14	.0994 1565	$\bar{2}$.997 4547	64	.0500 6867	.699 5660
15	.0947 2113	.976 4469	65	.0499 4619	.698 5024
16	.0906 3531	.957 2973	66	.0498 2983	.697 4894
17	.0870 5063	.939 7719	67	.0497 1924	.696 5244
18	.0838 8343	.923 6761	68	.0496 1413	.695 6054
19	.0810 6766	.908 8476	69	.0495 1420	.694 7297
20	.0785 5047	.895 1488	70	.0494 1917	.693 8954
21	.0762 8907	.882 4623	71	.0493 2879	.693 1005
22	.0742 4846	.870 6874	72	.0492 4282	.692 3429
23	.0723 9969	.859 7367	73	.0491 6103	.691 6210
24	.0707 1867	.849 5341	74	.0490 8320	.690 9328
25	.0691 8513	.840 0127	75	.0490 0912	.690 2769
26	.0677 8192	.831 1139	76	.0489 3862	.689 6517
27	.0664 9444	.822 7854	77	.0488 7150	.689 0556
28	.0653 1016	.814 9808	78	.0488 0759	.688 4874
29	.0642 1829	.807 6587	79	.0487 4674	.687 9456
30	.0632 0945	.800 7820	80	.0486 8879	.687 4290
31	.0622 7550	.794 3172	81	.0486 3360	.686 9364
32	.0614 0929	.788 2340	82	.0485 8103	.686 4664
33	.0606 0455	.782 5053	83	.0485 3094	.686 0187
34	.0598 5574	.777 1058	84	.0484 8322	.685 5915
35	.0591 5794	.772 0131	85	.0484 3775	.685 1840
36	.0585 0680	.767 2063	86	.0483 9445	.684 7955
37	.0578 9843	.762 6667	87	.0483 5315	.684 4247
38	.0573 2932	.758 3768	88	.0483 1380	.684 0712
39	.0567 9637	.754 3206	89	.0482 7629	.683 7339
40	.0562 9675	.750 4834	90	.0482 4054	.683 4122
41	.0558 2791	.746 8514	91	.0482 0646	.683 1052
42	.0553 8756	.743 4123	92	.0481 7397	.682 8124
43	.0549 7362	.740 1543	93	.0481 4299	.682 5331
44	.0545 8417	.737 0668	94	.0481 1346	.682 2666
45	.0542 1750	.734 1395	95	.0480 8530	.682 0123
46	.0538 7203	.731 3633	96	.0480 5845	.681 7697
47	.0535 4630	.728 7294	97	.0480 3284	.681 5383
48	.0532 3900	.726 2299	98	.0480 0842	.681 3174
49	.0529 4891	.723 8571	99	.0479 8513	.681 1067
50	.0526 7490	.721 6037	100	.0479 6292	.680 9056

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0500 0000	0.021 1893	51	0.0545 2867	$\bar{2}$.736 6249
2	0.5378 0488	$\bar{1}$.730 6248	52	.0542 9450	.734 7558
3	.3672 0856	.564 9128	53	.0540 7334	.732 9832
4	.2820 1183	.450 2673	54	.0538 6438	.731 3016
5	.2309 7480	.363 5645	55	.0536 6686	.729 7062
6	.1970 1747	.294 5047	56	.0534 8010	.728 1922
7	.1728 1982	.237 5936	57	.0533 0343	.726 7552
8	.1547 2181	.189 5515	58	.0531 3626	.725 3910
9	.1406 9008	.148 2635	59	.0529 7802	.724 0957
10	.1295 0458	.112 2851	60	.0528 2818	.722 8657
11	.1203 8889	.080 5865	61	.0526 8627	.721 6975
12	.1128 2541	.052 4070	62	.0525 5183	.720 5878
13	.1064 5577	.027 1692	63	.0524 2442	.719 5337
14	.1010 2397	.004 4244	64	.0523 0365	.718 5320
15	.0963 4229	$\bar{2}$.983 8170	65	.0521 8915	.717 5802
16	.0922 6991	.965 0601	66	.0520 8057	.716 6758
17	.0886 9914	.947 9194	67	.0519 7757	.715 8160
18	.0855 4622	.932 2008	68	.0518 7986	.714 9988
19	.0827 4501	.917 7418	69	.0517 8715	.714 2221
20	.0802 4259	.904 4049	70	.0516 9915	.713 4834
21	.0779 9611	.892 0730	71	.0516 1563	.712 7811
22	.0759 7051	.880 6450	72	.0515 3633	.712 1134
23	.0741 3682	.870 0340	73	.0514 6103	.711 4785
24	.0724 7090	.860 1637	74	.0513 8953	.710 8746
25	.0709 5246	.850 9674	75	.0513 2161	.710 3003
26	.0695 6432	.842 3866	76	.0512 5709	.709 7540
27	.0682 9186	.834 3689	77	.0511 9580	.709 2343
28	.0671 2253	.826 8683	78	.0511 3756	.708 7400
29	.0660 4551	.819 8433	79	.0510 8222	.708 2698
30	.0650 5144	.813 2570	80	.0510 2962	.707 8224
31	.0641 3212	.807 0756	81	.0509 7963	.707 3967
32	.0632 8042	.801 2694	82	.0509 3211	.706 9917
33	.0624 9004	.795 8108	83	.0508 8694	.706 6063
34	.0617 5545	.790 6752	84	.0508 4399	.706 2397
35	.0610 7171	.785 8401	85	.0508 0316	.705 8907
36	.0604 3446	.781 2846	86	.0507 6433	.705 5586
37	.0598 3979	.776 9901	87	.0507 2740	.705 2426
38	.0592 8423	.772 9392	88	.0506 9228	.704 9418
39	.0587 6462	.769 1160	89	.0506 5888	.704 6556
40	.0582 7816	.765 5058	90	.0506 2711	.704 3832
41	.0578 2229	.762 0953	91	.0505 9689	.704 1239
42	.0573 9471	.758 8719	92	.0505 6815	.703 8770
43	.0569 9333	.755 4241	93	.0505 4080	.703 6421
44	.0566 1625	.752 9411	94	.0505 1478	.703 4185
45	.0562 6173	.750 2131	95	.0504 9003	.703 2056
46	.0559 2820	.747 6309	96	.0504 6648	.703 0030
47	.0556 1421	.745 1858	97	.0504 4407	.702 8101
48	.0553 1843	.742 8698	98	.0504 2274	.702 6264
49	.0550 3965	.740 6757	99	.0504 0245	.702 4516
50	.0547 7674	.738 5961	100	.0503 8314	.702 2852

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0525 0000	0.022 2221	51	0.0566 6886	$\bar{2}$.753 3445
2	0.5397 1072	$\bar{1}$.732 1610	52	.0564 4528	.751 6277
3	.3689 3004	.566 9440	53	.0562 3449	.750 0028
4	.2836 5136	.452 7848	54	.0560 3566	.748 4645
5	.2325 7332	.366 5599	55	.0558 4805	.747 0080
6	.1985 9542	.297 9692	56	.0556 7096	.745 6287
7	.1743 8885	.241 5187	57	.0555 0374	.744 3223
8	.1562 8917	.193 9289	58	.0553 4579	.743 0846
9	.1422 6057	.153 0845	59	.0551 9655	.741 9119
10	.1310 8152	.117 5415	60	.0550 5549	.740 8007
11	.1219 7467	.086 2697	61	.0549 2214	.739 7474
12	.1144 2178	.058 5087	62	.0547 9604	.738 7492
13	.1080 6405	.033 6813	63	.0546 7676	.737 8028
14	.1026 4516	.011 3385	64	.0545 6391	.736 9055
15	.0979 7715	$\bar{2}$.991 1248	65	.0544 5712	.736 0547
16	.0939 1903	.972 7536	66	.0543 5605	.735 2479
17	.0903 6297	.955 9905	67	.0542 6036	.734 4827
18	.0872 2511	.940 6415	68	.0541 6976	.733 7569
19	.0844 3921	.926 5441	69	.0540 8396	.733 0685
20	.0819 5228	.913 5611	70	.0540 0268	.732 4153
21	.0797 2142	.901 5750	71	.0539 2569	.731 7958
22	.0777 1153	.890 4855	72	.0538 5274	.731 2078
23	.0758 9358	.880 2051	73	.0537 8362	.730 6500
24	.0742 4339	.870 6578	74	.0537 1811	.730 1207
25	.0727 4066	.861 7773	75	.0536 5601	.729 6184
26	.0713 6817	.853 5045	76	.0535 9714	.729 1416
27	.0701 1129	.845 7880	77	.0535 4133	.728 6891
28	.0689 5744	.838 5811	78	.0534 8841	.728 2597
29	.0678 9578	.831 8428	79	.0534 3822	.727 8520
30	.0669 1693	.825 5361	80	.0533 9063	.727 4650
31	.0660 1270	.819 6275	81	.0533 4549	.727 0977
32	.0651 7593	.814 0872	82	.0533 0267	.726 7490
33	.0644 0032	.808 8880	83	.0532 6205	.726 4179
34	.0636 8030	.804 0051	84	.0532 2351	.726 1036
35	.0630 1096	.799 4161	85	.0531 8695	.725 8051
36	.0623 8791	.795 1005	86	.0531 5226	.725 5217
37	.0618 0725	.791 0394	87	.0531 1934	.725 2527
38	.0612 6548	.787 2158	88	.0530 8810	.724 9972
39	.0607 5946	.783 6139	89	.0530 5845	.724 7546
40	.0602 8636	.780 2191	90	.0530 3031	.724 5242
41	.0598 4365	.777 0181	91	.0530 0361	.724 3055
42	.0594 2899	.773 9984	92	.0529 7826	.724 0977
43	.0590 4030	.771 1485	93	.0529 5420	.723 9004
44	.0586 7569	.768 4582	94	.0529 3136	.723 7131
45	.0583 3341	.765 9174	95	.0529 0967	.723 5351
46	.0580 1188	.763 5169	96	.0528 8908	.723 3661
47	.0577 0966	.761 2486	97	.0528 6954	.723 2055
48	.0574 2542	.759 1041	98	.0528 5098	.723 0531
49	.0571 5794	.757 0765	99	.0528 3337	.722 9084
50	.0569 0609	.755 1588	100	.0528 1664	.722 7707

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0550 0000	0.023 2525	51	0.0588 3495	$\bar{2}$.769 6355
2	0.5416 1800	$\bar{1}$.733 6931	52	.0586 2186	.768 0596
3	.3706 5407	.568 9688	53	.0584 2130	.766 5712
4	.2852 9449	.455 2933	54	.0582 3245	.765 1651
5	.2341 7644	.369 5432	55	.0580 5458	.763 8364
6	.2001 7895	.301 4185	56	.0578 8697	.762 5808
7	.1759 6442	.245 4248	57	.0577 2900	.761 3940
8	.1578 6401	.198 2831	58	.0575 8006	.760 2721
9	.1438 3946	.157 8781	59	.0574 3959	.759 2114
10	.1326 6777	.122 7654	60	.0573 0707	.758 2082
11	.1235 7065	.091 9153	61	.0571 8202	.757 2594
12	.1160 2923	.064 5675	62	.0570 6400	.756 3622
13	.1096 8426	.040 1442	63	.0569 5258	.755 5134
14	.1042 7912	.018 1973	64	.0568 4737	.754 7104
15	.0996 2560	$\bar{2}$.998 3709	65	.0567 4800	.753 9506
16	.0955 8254	.980 3786	66	.0566 5413	.753 2316
17	.0920 4197	.963 9859	67	.0565 6544	.752 5512
18	.0889 1992	.948 9991	68	.0564 8163	.751 9072
19	.0861 5005	.935 2555	69	.0564 0242	.751 2977
20	.0836 7933	.922 6182	70	.0563 2754	.750 7208
21	.0814 6477	.910 9699	71	.0562 5675	.750 1747
22	.0794 7123	.900 2100	72	.0561 8982	.749 6576
23	.0776 6965	.890 2513	73	.0561 2652	.749 1681
24	.0760 3580	.881 0182	74	.0560 6665	.748 7046
25	.0745 4935	.872 4438	75	.0560 1002	.748 2657
26	.0731 9307	.864 4699	76	.0559 5645	.747 8502
27	.0719 5229	.857 0446	77	.0559 0577	.747 4566
28	.0708 1440	.850 1216	78	.0558 5781	.747 0839
29	.0697 6857	.843 6598	79	.0558 1243	.746 7309
30	.0688 0539	.837 6225	80	.0557 6949	.746 3967
31	.0679 1665	.831 9762	81	.0557 2884	.746 0800
32	.0670 9519	.826 6914	82	.0556 9036	.745 7800
33	.0663 3469	.821 7407	83	.0556 5395	.745 4960
34	.0656 2958	.817 0996	84	.0556 1947	.745 2268
35	.0649 7493	.812 7458	85	.0555 8683	.744 9718
36	.0643 6635	.808 6588	86	.0555 5593	.744 7304
37	.0637 9993	.804 8202	87	.0555 2667	.744 5016
38	.0632 7216	.801 2127	88	.0554 9896	.744 2849
39	.0627 7991	.797 8207	89	.0554 7273	.744 0795
40	.0623 2034	.794 6299	90	.0554 4788	.743 8849
41	.0618 9090	.791 6268	91	.0554 2435	.743 7006
42	.0614 8927	.788 7993	92	.0554 0207	.743 5259
43	.0611 1337	.786 1362	93	.0553 8096	.743 3605
44	.0607 6128	.783 6269	94	.0553 6097	.743 2036
45	.0604 3127	.781 2617	95	.0553 4204	.743 0552
46	.0601 2175	.779 0316	96	.0553 2410	.742 9144
47	.0598 3129	.776 9283	97	.0553 0711	.742 7810
48	.0595 5854	.774 9441	98	.0552 9101	.742 6545
49	.0593 0230	.773 0715	99	.0552 7577	.742 5348
50	.0590 6145	.771 3041	100	.0552 6132	.742 4213

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0575 0000	0.024 2804	51	0.0610 2543	$\bar{2}$.785 5108
2	0.5435 2673	$\bar{1}$.735 2209	52	.0608 2266	.784 0654
3	.3723 8067	.570 9871	53	.0606 3216	.782 7030
4	.2869 4120	.457 7929	54	.0604 5310	.781 4186
5	.2357 8414	.372 5146	55	.0602 8475	.780 2075
6	.2017 6802	.304 9523	56	.0601 2642	.779 0653
7	.1775 4648	.249 3121	57	.0599 7746	.777 9880
8	.1594 4628	.202 6144	58	.0598 3727	.776 9718
9	.1454 2670	.162 6441	59	.0597 0532	.776 0130
10	.1342 6327	.127 9572	60	.0595 8106	.775 1082
11	.1251 7676	.097 5237	61	.0594 6405	.774 2545
12	.1176 4767	.070 5833	62	.0593 5381	.773 4486
13	.1113 1631	.046 5588	63	.0592 4995	.772 6880
14	.1059 2574	.025 0015	64	.0591 5206	.771 9699
15	.1012 8751	.005 5560	65	.0590 5979	.771 2919
16	.0972 6029	$\bar{2}$.987 9356	66	.0589 7281	.770 6518
17	.0937 3597	.971 9062	67	.0588 9079	.770 0474
18	.0906 3046	.957 2742	68	.0588 1344	.769 4766
19	.0878 7734	.943 8769	69	.0587 4048	.768 9375
20	.0854 2350	.931 5774	70	.0586 7166	.768 4284
21	.0832 2590	.920 2585	71	.0586 0673	.767 9475
22	.0812 4934	.909 8198	72	.0585 4546	.767 4932
23	.0794 6472	.900 1744	73	.0584 8764	.767 0641
24	.0778 4780	.891 2464	74	.0584 3306	.766 6586
25	.0763 7817	.882 9693	75	.0583 8155	.766 2757
26	.0750 3860	.875 2847	76	.0583 3292	.765 9137
27	.0738 1439	.868 1410	77	.0582 8701	.765 5718
28	.0726 9293	.861 4922	78	.0582 4366	.765 2486
29	.0716 6335	.855 2971	79	.0582 0274	.764 9434
30	.0707 1623	.849 5192	80	.0581 6409	.764 6549
31	.0698 4336	.844 1252	81	.0581 2758	.764 3823
32	.0690 3754	.839 0853	82	.0580 9311	.764 1247
33	.0682 9246	.834 3728	83	.0580 6054	.763 8811
34	.0676 0254	.829 9630	84	.0580 2978	.763 6510
35	.0669 6283	.825 8338	85	.0580 0073	.763 4335
36	.0663 6893	.821 9648	86	.0579 7328	.763 2279
37	.0658 1694	.818 3377	87	.0579 4734	.763 0336
38	.0653 0335	.814 9354	88	.0579 2284	.762 8468
39	.0648 2500	.811 7425	89	.0578 9969	.762 6763
40	.0643 7907	.808 7447	90	.0578 7781	.762 5121
41	.0639 6299	.805 9287	91	.0578 5714	.762 3570
42	.0635 7445	.803 2826	92	.0578 3761	.762 2104
43	.0632 1135	.800 7950	93	.0578 1915	.762 0718
44	.0628 7179	.798 4558	94	.0578 0171	.761 9408
45	.0625 5404	.796 2554	95	.0577 8522	.761 8168
46	.0622 5650	.794 1847	96	.0577 6964	.761 6997
47	.0619 7773	.792 2357	97	.0577 5492	.761 5889
48	.0617 1641	.790 4007	98	.0577 4100	.761 4842
49	.0614 7131	.788 6725	99	.0577 2784	.761 3853
50	.0612 4133	.787 0446	100	.0577 1540	.761 2917

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0600 0000	0.025 3059	51	0.0632 3880	$\bar{2}$.800 9836
2	0.5454 3689	$\bar{1}$.736 7445	52	.0630 4617	.799 6587
3	.3741 0981	.572 9990	53	.0628 6551	.798 4125
4	.2885 9149	.460 2835	54	.0626 9602	.797 2399
5	.2373 9640	.375 4741	55	.0625 3696	.796 1368
6	.2033 6263	.308 2711	56	.0623 8765	.795 0986
7	.1791 3502	.253 1805	57	.0622 4744	.794 1215
8	.1610 3594	.206 9228	58	.0621 1574	.793 2016
9	.1470 2224	.167 3830	59	.0619 9200	.792 3356
10	.1358 6796	.133 1171	60	.0618 7572	.791 5202
11	.1267 9294	.103 0950	61	.0617 6642	.790 7524
12	.1192 7703	.076 5568	62	.0616 6366	.790 0293
13	.1129 6011	.052 9252	63	.0615 6704	.789 3482
14	.1075 8491	.031 7513	64	.0614 7615	.788 7067
15	.1029 6276	.012 6801	65	.0613 9066	.788 1023
16	.0989 5214	$\bar{2}$.995 4252	66	.0613 1022	.787 5329
17	.0954 4480	.979 7523	67	.0612 3454	.786 9965
18	.0923 5654	.965 4677	68	.0611 6330	.786 4909
19	.0896 2086	.952 4091	69	.0610 9625	.786 0146
20	.0871 8456	.940 4396	70	.0610 3313	.785 5656
21	.0850 0455	.929 4422	71	.0609 7370	.785 1426
22	.0830 4557	.919 3164	72	.0609 1774	.784 7438
23	.0812 7848	.909 9756	73	.0608 6505	.784 3680
24	.0796 7900	.901 3439	74	.0608 1542	.784 0137
25	.0782 2672	.893 3551	75	.0607 6867	.783 6797
26	.0769 0435	.885 9509	76	.0607 2463	.783 3649
27	.0756 9717	.879 0797	77	.0606 8315	.783 0681
28	.0745 9255	.872 6955	78	.0606 4407	.782 7883
29	.0735 7961	.866 7575	79	.0606 0724	.782 5245
30	.0726 4891	.861 2291	80	.0605 7254	.782 2758
31	.0717 9222	.856 0774	81	.0605 3984	.782 0413
32	.0710 0234	.851 2726	82	.0605 0903	.781 8201
33	.0702 7293	.846 7881	83	.0604 7998	.781 6117
34	.0695 9843	.842 5995	84	.0604 5261	.781 4151
35	.0689 7386	.838 6845	85	.0604 2681	.781 2297
36	.0683 9483	.835 0233	86	.0604 0249	.781 0548
37	.0678 5743	.831 5974	87	.0603 7956	.780 8899
38	.0673 5812	.828 3900	88	.0603 5795	.780 7345
39	.0668 9377	.825 3857	89	.0603 3757	.780 5878
40	.0664 6154	.822 5704	90	.0603 1836	.780 4495
41	.0660 5886	.819 9311	91	.0603 0025	.780 3191
42	.0656 8342	.817 4557	92	.0602 8318	.780 1962
43	.0653 3312	.815 1334	93	.0602 6708	.780 0801
44	.0650 0606	.812 9538	94	.0602 5190	.779 9708
45	.0647 0050	.810 9077	95	.0602 3758	.779 8675
46	.0644 1485	.808 9860	96	.0602 2408	.779 7702
47	.0641 4768	.807 1809	97	.0602 1135	.779 6784
48	.0638 9766	.805 4849	98	.0601 9935	.779 5918
49	.0636 6356	.803 8909	99	.0601 8803	.779 5101
50	.0634 4429	.802 3925	100	.0601 7736	.779 4331

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0650 0000	0.027 3496	51	0.0677 2861	$\bar{2}$.830 7722
2	0.5492 6150	$\bar{1}$.739 7792	52	.0675 5553	.829 6609
3	.3775 7570	.577 0041	53	.0673 9382	.828 6200
4	.2919 0274	.465 2382	54	.0672 4267	.827 6450
5	.2406 3454	.381 3580	55	.0671 0137	.826 7315
6	.2065 6831	.315 0637	56	.0669 6923	.825 8753
7	.1823 3137	.260 8614	57	.0668 4563	.825 0731
8	.1642 3730	.215 4718	58	.0667 2999	.824 3211
9	.1502 3803	.176 7799	59	.0666 2177	.823 6162
10	.1391 0469	.143 3418	60	.0665 2047	.822 9553
11	.1300 5521	.114 1277	61	.0664 2564	.822 3358
12	.1225 6817	.088 3777	62	.0663 3684	.821 7548
13	.1162 8256	.065 5146	63	.0662 5367	.821 2100
14	.1109 4048	.045 0901	64	.0661 7577	.820 6990
15	.1063 5278	.026 7488	65	.0661 0280	.820 2199
16	.1023 7757	.010 2048	66	.0660 3442	.819 7704
17	.0989 0633	$\bar{2}$.995 2241	67	.0659 7034	.819 3488
18	.0958 5461	.981 6130	68	.0659 1029	.818 9533
19	.0931 5575	.969 2096	69	.0658 5400	.818 5822
20	.0907 5640	.957 8772	70	.0658 0124	.818 2341
21	.0886 1333	.947 4991	71	.0657 5177	.817 9075
22	.0866 9120	.937 9750	72	.0657 0539	.817 6010
23	.0849 6078	.929 2185	73	.0656 6190	.817 3135
24	.0833 9770	.921 1541	74	.0656 2112	.817 0436
25	.0819 8148	.913 7158	75	.0655 8287	.816 7904
26	.0806 9480	.906 8456	76	.0655 4699	.816 5527
27	.0795 2288	.900 4921	77	.0655 1335	.816 3298
28	.0784 5305	.894 6099	78	.0654 8178	.816 1205
29	.0774 7440	.889 1582	79	.0654 5217	.815 9241
30	.0765 7744	.884 1009	80	.0654 2440	.815 7397
31	.0757 5393	.879 4052	81	.0653 9834	.815 5667
32	.0749 9664	.875 0419	82	.0653 7388	.815 4043
33	.0742 9924	.870 9844	83	.0653 5094	.815 2519
34	.0736 5610	.867 2087	84	.0653 2941	.815 1088
35	.0730 6226	.863 6931	85	.0653 0921	.814 9744
36	.0725 1332	.860 4178	86	.0652 9026	.814 8484
37	.0720 0534	.857 3647	87	.0652 7247	.814 7301
38	.0715 3480	.854 5174	88	.0662 5577	.814 6189
39	.0710 9854	.851 8607	89	.0652 4010	.814 5147
40	.0706 9373	.849 3809	90	.0652 2540	.814 4167
41	.0703 1779	.847 0652	91	.0652 1160	.814 3248
42	.0699 6842	.844 9021	92	.0651 9864	.814 2386
43	.0696 4353	.842 8808	93	.0651 8648	.814 1575
44	.0693 4119	.840 9913	94	.0651 7507	.814 0816
45	.0690 5968	.839 2246	95	.0651 6436	.814 0102
46	.0687 9743	.837 5723	96	.0651 5431	.813 9432
47	.0685 5300	.836 0265	97	.0651 4487	.813 8802
48	.0683 2506	.834 5800	98	.0651 3601	.813 8212
49	.0681 1240	.433 2262	99	.0651 2769	.813 7657
50	.0679 1393	.831 9589	100	.0651 1988	.813 7136

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0700 0000	0.029 3838	51	0.0722 9365	$\bar{2}$.859 1002
2	0.5530 9179	$\bar{1}$.742 7972	52	.0721 3901	.858 1702
3	.3810 5166	.580 9838	53	.0719 9509	.857 3029
4	.2952 2812	.470 1578	54	.0718 6110	.856 4939
5	.2438 9069	.387 1952	55	.0717 3633	.855 7391
6	.2097 9580	.321 7969	56	.0716 2011	.855 0350
7	.1855 5322	.268 4685	57	.0715 1183	.854 3779
8	.1674 6776	.223 9312	58	.0714 1093	.853 7647
9	.1534 8647	.186 0701	59	.0713 1689	.853 1924
10	.1423 7750	.153 4414	60	.0712 2923	.852 6582
11	.1333 5690	.125 0156	61	.0711 4749	.852 1596
12	.1259 0199	.100 0326	62	.0710 7127	.851 6941
13	.1196 5085	.077 9158	63	.0710 0019	.851 2595
14	.1143 4494	.058 2170	64	.0709 3388	.850 8537
15	.1097 9462	.040 5810	65	.0708 7203	.850 4748
16	.1058 5765	.024 7223	66	.0708 1431	.850 1211
17	.1024 2519	.010 4068	67	.0707 6046	.849 7907
18	.0994 1260	$\bar{2}$.997 4414	68	.0707 1021	.849 4821
19	.0967 5302	.985 6645	69	.0706 6330	.849 1939
20	.0943 9293	.974 9395	70	.0706 1953	.848 9248
21	.0922 8900	.965 1499	71	.0705 7866	.848 6734
22	.0904 0577	.956 1962	72	.0705 4051	.848 4387
23	.0887 1393	.947 9918	73	.0705 0490	.848 2193
24	.0871 8902	.940 4618	74	.0704 7164	.848 0144
25	.0858 1052	.933 5406	75	.0704 4060	.847 8230
26	.0845 6103	.927 1703	76	.0704 1160	.847 6442
27	.0834 2573	.921 3000	77	.0703 8453	.847 4772
28	.0823 9193	.915 8847	78	.0703 5924	.847 3211
29	.0814 4865	.910 8839	79	.0703 3563	.847 1754
30	.0805 8640	.906 2618	80	.0703 1357	.847 0391
31	.0797 9691	.901 9861	81	.0702 9297	.846 9119
32	.0790 7292	.898 0278	82	.0702 7373	.846 7930
33	.0784 0807	.894 3608	83	.0702 5576	.846 6819
34	.0777 9674	.890 9614	84	.0702 3897	.846 5781
35	.0772 3396	.887 8083	85	.0702 2329	.846 4811
36	.0767 1531	.884 8821	86	.0702 0863	.846 3905
37	.0762 3685	.882 1649	87	.0701 9495	.846 3058
38	.0757 9505	.879 6409	88	.0701 8216	.846 2267
39	.0753 8676	.877 2951	89	.0701 7021	.846 1528
40	.0750 0914	.875 1142	90	.0761 5905	.846 0837
41	.0746 5962	.873 0858	91	.0701 4863	.846 0192
42	.0743 3591	.871 1987	92	.0701 3888	.845 9588
43	.0740 3590	.869 4423	93	.0701 2978	.845 9025
44	.0737 5769	.867 8072	94	.0701 2128	.845 8498
45	.0734 9957	.866 2848	95	.0701 1333	.845 8006
46	.0732 5996	.864 8667	96	.0701 0590	.845 7546
47	.0730 3744	.863 5455	97	.0700 9897	.745 7115
48	.0728 3070	.862 3145	98	.0700 9248	.845 6714
49	.0726 3853	.861 1671	99	.0700 8643	.845 6340
50	.0724 5985	.860 0974	100	.0700 8076	.845 5988

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0750 0000	0.031 4085	51	0.0769 2411	$\bar{2}$.886 0625
2	0.5569 2771	$\bar{1}$.745 7988	52	.0767 8667	.885 2858
3	.3845 3763	.584 9388	53	.0766 5927	.884 5646
4	.2985 6751	.475 0425	54	.0765 4112	.883 8948
5	.2471 6472	.392 9864	55	.0764 3155	.883 2727
6	.2130 4489	.328 4711	56	.0763 2990	.882 6947
7	.1888 0032	.276 0027	57	.0762 3559	.882 1578
8	.1707 2702	.232 3023	58	.0761 4806	.881 6589
9	.1567 6716	.195 2551	59	.0760 6683	.881 1953
10	.1456 8593	.163 4176	60	.0759 9142	.880 7646
11	.1366 9747	.135 7605	61	.0759 2140	.880 3642
12	.1292 7783	.111 5240	62	.0758 5638	.879 9921
13	.1230 6420	.090 1317	63	.0757 9600	.879 6463
14	.1177 9738	.071 1356	64	.0757 3992	.879 3248
15	.1132 8724	.054 1810	65	.0756 8782	.879 0260
16	.1093 9116	.038 9822	66	.0756 3942	.878 7482
17	.1060 0003	.025 3060	67	.0755 9446	.878 4899
18	.1030 2896	.012 9593	68	.0755 5268	.878 2499
19	.1004 1090	.001 7808	69	.0755 1385	.878 0266
20	.0980 9219	$\bar{2}$.991 6344	70	.0754 7778	.877 8191
21	.0960 2938	.982 4041	71	.0754 4425	.877 6262
22	.0941 8687	.973 9904	72	.0754 1308	.877 4467
23	.0925 3528	.966 3073	73	.0753 8411	.877 2798
24	.0910 5008	.959 2803	74	.0753 5719	.877 1247
25	.0897 1067	.952 8441	75	.0753 3216	.876 9804
26	.0884 9961	.946 9414	76	.0753 0889	.876 8462
27	.0874 0203	.941 5215	77	.0752 8725	.876 7215
28	.0864 0520	.936 5399	78	.0752 6714	.876 6054
29	.0854 9811	.931 9565	79	.0752 4844	.876 4975
30	.0846 7124	.927 7359	80	.0752 3106	.876 3971
31	.0839 1629	.923 8462	81	.0752 1489	.876 3038
32	.0832 2599	.920 2589	82	.0751 9986	.876 2170
33	.0825 9397	.916 9484	83	.0751 8588	.876 1363
34	.0820 1461	.913 8912	84	.0751 7288	.876 0612
35	.0814 8291	.911 0665	85	.0751 6079	.875 9913
36	.0809 9446	.908 4553	86	.0751 4955	.875 9264
37	.0805 4533	.906 0404	87	.0951 3910	.875 8660
38	.0801 3197	.903 8058	88	.0751 2938	.875 8098
39	.0797 5124	.901 7374	89	.0751 2034	.875 7575
40	.0794 0031	.899 8222	90	.0751 1193	.875 7089
41	.0790 7663	.898 0482	91	.0751 0411	.875 6637
42	.0787 7789	.896 4043	92	.0750 9684	.875 6217
43	.0785 0201	.894 8808	93	.0750 9007	.875 5825
44	.0782 4710	.893 4682	94	.0750 8378	.875 5462
45	.0780 1146	.892 1584	95	.0750 7793	.875 5123
46	.0777 9353	.890 9435	96	.0750 7249	.875 4808
47	.0775 9190	.889 8164	97	.0750 6743	.875 4616
48	.0774 0527	.888 7705	98	.0750 6272	875 4243
49	.0772 3247	.887 7999	99	.0750 5834	.875 3989
50	.0770 7241	.886 8989	100	.0750 5427	.875 3754

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0800 0000	0.033 4238	51	0.0816 1116	$\bar{2}$.911 7495
2	0.5607 6923	$\bar{1}$.748 7843	52	.0814 8959	.911 1022
3	.3880 3351	.588 8692	53	.0813 7735	.910 5036
4	.3019 2080	.479 8930	54	.0812 7370	.909 9500
5	.2504 5645	.398 7322	55	.0811 7796	.909 4381
6	.2163 1539	.335 0874	56	.0810 8952	.908 9647
7	.1920 7240	.283 4649	57	.0810 0780	.908 5268
8	.1740 1476	.240 5861	58	.0809 3228	.908 1218
9	.1600 7971	.204 3363	59	.0808 6247	.907 7470
10	.1490 2949	.173 2722	60	.0807 9795	.907 4004
11	.1400 7634	.146 3648	61	.0807 3830	.907 0796
12	.1326 9502	.122 8546	62	.0806 8314	.906 7827
13	.1265 2181	.102 1654	63	.0806 3214	.906 5081
14	.1212 9685	.083 8495	64	.0805 8497	.906 2541
15	.1168 2954	.067 5527	65	.0805 4135	.906 0189
16	.1129 7687	.052 9895	66	.0805 0100	.905 8013
17	.1096 2943	.039 9272	67	.0804 6367	.905 5998
18	.1067 0210	.028 1729	68	.0804 2914	.905 4134
19	.1041 2763	.017 5660	69	.0803 9719	.905 2408
20	.1018 5221	.007 9705	70	.0803 6764	.905 0812
21	.0998 3225	$\bar{2}$.999 2709	71	.0803 4029	.904 9334
22	.0980 3207	.991 3682	72	.0803 1498	.904 7965
23	.0964 2217	.984 1769	73	.0802 9156	.904 6699
24	.0949 7796	.977 6228	74	.0802 6990	.904 5527
25	.0936 7878	.971 6412	75	.0802 4984	.904 4441
26	.0925 0713	.966 1752	76	.0802 3128	.904 3437
27	.0914 4810	.961 1747	77	.0802 1410	.904 2507
28	.0904 8890	.956 5953	78	.0801 9820	.904 1646
29	.0896 1854	.952 3979	79	.0801 8349	.904 0849
30	.0888 2743	.948 5471	80	.0801 6987	.904 0112
31	.0881 0728	.945 0118	81	.0801 5726	.903 9429
32	.0874 5081	.941 7638	82	.0801 4559	.903 8796
33	.0868 5163	.938 7780	83	.0801 3479	.903 8211
34	.0863 0411	.936 0314	84	.0801 2479	.903 7668
35	.0858 0326	.933 5038	85	.0801 1553	.903 7168
36	.0853 4467	.931 1765	86	.0801 0696	.903 6703
37	.0849 2440	.929 0325	87	.0800 9902	.903 6272
38	.0845 3894	.927 0568	88	.0800 9168	.903 5874
39	.0841 8513	.925 2354	89	.0800 8489	.903 5506
40	.0838 6016	.923 5557	90	.0800 7860	.903 5164
41	.0835 6149	.922 0062	91	.0800 7277	.903 4849
42	.0832 8680	.920 5763	92	.0800 6737	.903 4556
43	.0830 3414	.919 2567	93	.0800 6238	.903 4285
44	.0828 0152	.918 0383	94	.0800 5775	.903 4034
45	.0825 8728	.916 9132	95	.0800 5347	.903 3802
46	.0823 8991	.915 8740	96	.0800 4951	.903 3586
47	.0822 0799	.914 9141	97	.0800 4584	.903 3387
48	.0820 4027	.914 0271	98	.0800 4244	.903 3204
49	.0818 8557	.913 2074	99	.0800 3930	.903 3033
50	.0817 4286	.912 4498	100	.0800 3638	.903 2874

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0850 0000	0.035 4297	51	0.0863 4688	$\bar{2}$.936 2467
2	0.5646 1631	$\bar{1}$.751 7534	52	.0862 3983	.935 7079
3	.3915 3925	.592 7753	53	.0861 4139	.935 2119
4	.3052 8789	.484 7096	54	.8860 5087	.934 7553
5	.2537 6575	.404 4330	55	.0859 6761	.934 3349
6	.2196 0708	.341 6463	56	.0858 9101	.933 9477
7	.1953 6922	.290 8561	57	.0858 2053	.933 5912
8	.17-3 3065	.248 7838	58	.0857 5568	.933 2629
9	.1634 2372	.213 3151	59	.0856 9600	.932 9606
10	.1524 0771	.183 0069	60	.0856 4106	.932 6820
11	.1434 9290	.156 8304	61	.0855 9049	.932 4255
12	.1361 5286	.134 0268	62	.0855 4393	.932 1892
13	.1300 2287	.114 0197	63	.0855 0107	.931 9715
14	.1248 4243	.096 3622	64	.0854 6160	.931 7710
15	.1204 2046	.080 7003	65	.0854 2526	.931 5863
16	.1166 1354	.066 7490	66	.0853 9179	.931 4161
17	.1133 1198	.054 2758	67	.0853 6097	.931 2593
18	.1104 3041	.043 0887	68	.6853 3258	.931 1149
19	.1079 0140	.033 0271	69	.0853 0643	.930 9818
20	.1056 7097	.023 9557	70	.0852 8234	.930 8591
21	.1036 9541	.015 7595	71	.0852 6016	.630 7461
22	.1019 3892	.008 3400	72	.0852 3972	.930 6420
23	.1003 7193	.001 6123	73	.0852 2089	.930 5461
24	.0989 6975	$\bar{2}$.995 5025	74	.0852 0354	.930 4576
25	.0977 1168	.989 9465	75	.0851 8756	.930 3762
26	.0965 8016	.984 8879	76	.0851 7284	.930 3011
27	.0955 6025	.980 2773	77	.0851 5927	.930 2319
28	.0946 3913	.976 0707	78	.0851 4677	.930 1682
29	.0938 0576	.972 2295	79	.0851 3526	.930 1095
30	.0930 5058	.968 7191	80	.0851 2465	.630 0553
31	.0923 6524	.965 5086	81	.0851 1487	.930 0054
32	.0917 4247	.962 5704	82	.0851 0586	.929 9595
33	.0911 7588	.959 8800	83	.0850 9756	.929 9171
34	.0906 5984	.957 4149	84	.0850 8990	.929 8780
35	.0901 8937	.955 1554	85	.0850 8285	.929 8420
36	.0897 6006	.953 0831	86	.0850 7636	.929 8089
37	.0893 6799	.951 1820	87	.0850 7037	.929 7783
38	.0890 0966	.949 4371	88	.0850 6486	.929 7502
39	.0886 8193	.947 8351	89	.0850 5977	.929 7242
40	.0883 8201	.946 3639	90	.0850 5508	.929 7002
41	.0881 0737	.945 0122	91	.0850 5077	.929 6783
42	.0878 5576	.943 7702	92	.0850 4679	.929 6579
43	.0876 2512	.942 6286	93	.0850 4312	.929 6392
44	.0874 1363	.941 5792	94	.0850 3974	.929 6219
45	.0872 1961	.940 6141	95	.0850 3663	.929 6060
46	.0870 4154	.939 7266	96	.0850 3376	.929 5914
47	.0868 7807	.938 9102	97	.0850 3111	.929 5778
48	.0867 2795	.938 1591	98	.0850 2867	.929 5654
49	.0865 9005	.937 4680	99	.0850 2642	.929 5539
50	.0864 6334	.936 8320	100	.0850 2435	.929 5433

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.0900 0000	0.037 4265	51	0.0911 2430	$\bar{2}$.959 6342
2	0.5684 6890	$\bar{1}$.754 7067	52	.0910 3041	.959 1865
3	.3950 5476	.596 6573	53	.0909 4443	.958 7761
4	.3086 6866	.489 4926	54	.0908 6570	.958 4000
5	.2570 9246	.410 0893	55	.0907 9359	.958 0552
6	.2229 1978	.348 1486	56	.0907 2754	.957 7391
7	.1986 9052	.298 1772	57	.0906 6702	.957 4493
8	.1806 7438	.256 8966	58	.0906 1157	.957 1836
9	.1667 9880	.222 1929	59	.0905 6076	.956 9401
10	.1558 2009	.192 6235	60	.0905 1419	.956 7167
11	.1469 4666	.167 1598	61	.0904 7151	.956 5119
12	.1396 5066	.145 0429	62	.0904 3240	.956 3240
13	.1335 6656	.125 6977	63	.0903 9654	.956 1518
14	.1284 3317	.108 6772	64	.0903 6366	.955 9938
15	.1240 5888	.093 6278	65	.0903 3352	.955 8489
16	.1202 9991	.080 2653	66	.0903 0589	.955 7161
17	.1170 4625	.068 3574	67	.0902 8056	.955 5943
18	.1142 1229	.057 7128	68	.0902 5732	.955 4824
19	.1117 3041	.048 1714	69	.0902 3602	.955 3799
20	.1095 4648	.039 5984	70	.0902 1649	.955 2859
21	.1076 1663	.031 8794	71	.0901 9857	.955 1996
22	.1059 0499	.024 9164	72	.0901 8214	.955 1206
23	.1043 8188	.018 6251	73	.0901 6708	.955 0480
24	.1030 2256	.012 9322	74	.0901 5326	.954 9814
25	.1018 0625	.007 7744	75	.0901 4058	.954 9204
26	.1007 1536	.003 1957	76	.0901 2896	.954 8644
27	.0997 3491	$\bar{2}$.998 8472	77	.0901 1829	.954 8129
28	.0988 5205	.994 9857	78	.0901 0852	.954 7659
29	.0980 5572	.991 4730	79	.0900 9955	.954 7226
30	.0973 3635	.988 2751	80	.0900 9132	.954 6829
31	.0966 8560	.985 3618	81	.0900 8377	.954 6465
32	.0960 9619	.982 7062	82	.0900 7685	.954 6132
33	.0955 6173	.980 2840	83	.0900 7050	.954 5826
34	.0950 7660	.978 0736	84	.0900 6467	.954 5545
35	.0946 3584	.976 0557	85	.0900 5933	.954 5287
36	.0942 3505	.974 2125	86	.0900 5443	.954 5050
37	.0938 7033	.972 5283	87	.0900 4993	.954 4834
38	.0935 3820	.970 9890	88	.0900 4581	.954 4635
39	.0932 3554	.969 5815	89	.0900 4202	.954 4452
40	.0929 5961	.968 2943	90	.0900 3855	.954 4285
41	.0927 0789	.967 1167	91	.0900 3537	.954 4131
42	.0924 7814	.966 0391	92	.0900 3245	.954 3991
43	.0922 6837	.965 0528	93	.0900 2977	.954 3861
44	.0920 7675	.964 1500	94	.0900 2731	.954 3742
45	.0919 0165	.963 3233	95	.0900 2505	.954 3634
46	.0917 4160	.962 5663	96	.0900 2298	.954 3534
47	.0915 9525	.961 8729	97	.0900 2113	.954 3443
48	.0914 6139	.961 2378	98	.0900 1934	.954 3358
49	.0913 3893	.960 6559	99	.0900 1775	.954 3281
50	.0912 2687	.960 1228	100	.0900 1628	.954 3211

Annos	α	log α	Annos	α	log α
1	1.1000 0000	0.041 3927	51	0.1007 8046	$\bar{1}$.003 3763
2	0.5761 9048	$\bar{1}$.760 5660	52	.1007 0900	.003 0683
3	.4021 1480	.604 3501	53	.1006 4413	.002 7885
4	.3154 7080	.498 9592	54	.1005 8523	.002 5342
5	.2637 9748	.421 2707	55	.1005 3175	.002 3032
6	.2296 0738	.360 9859	56	.1004 8317	.002 0933
7	.2054 0550	.312 6121	57	.1004 3906	.001 9026
8	.1874 4402	.272 8716	58	.1003 9898	.001 7293
9	.1736 4054	.239 6511	59	.1003 6258	.001 5718
10	.1627 4539	.211 5087	60	.1003 2951	.001 4287
11	.1539 6314	.187 4168	61	.1002 9946	.001 2986
12	.1467 6332	.166 6175	62	.1002 7217	.001 1804
13	.1407 7852	.148 5364	63	.1002 4736	.001 0730
14	.1357 4622	.132 7277	64	.1002 2482	.000 9753
15	.1314 7378	.118 8391	65	.1002 0434	.000 8865
16	.1278 1662	.106 5873	66	.1001 8573	.000 8059
17	.1246 6413	.095 7415	67	.1001 6882	.000 7326
18	.1219 3022	.086 1114	68	.1001 5345	.000 6659
19	.1195 4687	.077 5382	69	.1001 3948	.000 6053
20	.1174 5962	.069 8886	70	.1001 2678	.000 5503
21	.1156 2439	.063 0495	71	.1001 1524	.000 5003
22	.1140 0506	.056 9241	72	.1001 0476	.000 4547
23	.1125 7181	.051 4297	73	.1000 9522	.000 4134
24	.1112 9978	.046 4944	74	.1000 8656	.000 3757
25	.1101 6807	.042 0557	75	.1000 7868	.000 3416
26	.1091 5904	.038 0597	76	.1000 7153	.000 3105
27	.1082 5764	.034 4586	77	.1000 6502	.000 2823
28	.1074 5101	.031 2105	78	.1000 5911	.000 2566
29	.1067 2807	.028 2787	79	.1000 5373	.000 2333
30	.1060 7925	.025 6304	80	.1000 4884	.000 2121
31	.1054 9621	.023 2369	81	.1000 4440	.000 1928
32	.1049 7172	.020 0723	82	.1000 4036	.000 1753
33	.1044 9941	.019 1138	83	.1000 3669	.000 1593
34	.1040 7371	.017 3410	84	.1000 3335	.000 1448
35	.1036 8971	.015 7356	85	.1000 3032	.000 1317
36	.1033 4306	.014 2813	86	.1000 2756	.000 1197
37	.1030 2994	.012 9635	87	.1000 2506	.000 1088
38	.1027 4692	.011 7688	88	.1000 2278	.000 0989
39	.1024 9098	.010 6857	89	.1000 2071	.000 0900
40	.1022 5941	.009 7033	90	.1000 1883	.000 0817
41	.1020 4980	.008 8121	91	.1000 1711	.000 0743
42	.1018 5999	.008 0036	92	.1000 1556	.000 0676
43	.1016 8805	.007 2699	93	.1000 1414	.000 0614
44	.1015 3224	.006 6040	94	.1000 1286	.000 0558
45	.1013 9100	.005 9994	95	.1000 1169	.000 0508
46	.1012 6295	.005 4506	96	.1000 1063	.000 0461
47	.1011 4682	.004 9522	97	.1000 0966	.000 0419
48	.1010 4148	.004 4997	98	.1000 0878	.000 0381
49	.1009 4590	.004 0887	99	.1000 0798	.000 0347
50	.1008 5917	.003 7154	100	.1000 0726	.000 0315

TABOA — VII

Esta Taboa fornece para cada taxa de juro indicada no mesmo alinhamento á esquerda,

1.º Os logarithmos de 1 com o seu juro de um anno (com 10 decimaes):

$$\log (1+t);$$

2.º Os logarithmos do juro de um anno (com 10 decimaes):

$$\log t.$$

Divide-se em 6 Partes para 478 differentes taxas. Omittem-se as taxas que já tiverem sido dadas n'uma das Partes precedentes, onde devem ser procuradas: como por exemplo, a taxa $^5/_{10}$ $^0/_0$ deve ser procurada na 2ª Parte sob a fórma $^1/_2$ $^0/_0$.

A caracteristica expressa de um logarithmo pertencerá a todos os logarithmos seguintes, emquanto outra não estiver expressa.

Taxa %	log (1+t)	log t	Taxa %	log (1+t)	log t
1/7	0.00061 99780	$\bar{3}$.15490 19600	6 1/7	0.02589 07738	$\bar{2}$.78837 04156
2/7	.00123 90721	.45593 19556	6 2/7	.02647 48955	.79835 46365
3/7	.00185 72850	.63202 32147	6 3/7	.02705 82327	.80811 44738
4/7	.00247 46191	.75696 19513	6 4/7	.02764 07875	.81765 97917
5/7	.00309 10770	.85387 19643	6 5/7	.02822 25618	.82699 98179
6/7	.00370 66610	.93305 32104	6 6/7	.02880 35579	.83614 31974
1	.00432 13738	$\bar{2}$.00000 00000	7	.02938 37777	.84509 80400
1 1/7	.00493 52177	.05799 19470	7 1/7	.02996 32234	.85387 19643
1 2/7	.00554 81952	.10914 44694	7 2/7	.03054 18970	.86247 21361
1 3/7	.00616 03087	.15490 19600	7 3/7	.03111 98006	.87090 53036
1 4/7	.00677 15607	.19629 46451	7 4/7	.03169 69362	.87917 78296
1 5/7	.00738 19536	.23408 32060	7 5/7	.03227 33059	.88729 57198
1 6/7	.00799 14898	.26884 53123	7 6/7	.03284 89116	.89526 46495
2	.00860 01718	.30102 99957	8	.03342 37555	.90308 99870
2 1/7	.00920 80019	.33099 32190	8 1/7	.03399 78395	.91077 68157
2 2/7	.00981 49823	.35902 19426	8 2/7	.03457 11656	.91832 99535
2 3/7	.01042 11157	.38535 08814	8 3/7	.03514 37359	.92575 39716
2 4/7	.01102 64042	.41017 44651	8 4/7	.03571 55523	.93305 32104
2 5/7	.01163 08504	.43365 55609	8 5/7	.03628 66168	.94023 17950
2 6/7	.01223 44564	.45593 19556	8 6/7	.03685 69313	.94729 36495
3	.01283 72247	47712 12547	9	.03742 64979	.95424 25094
3 1/7	.01343 91576	.49732 46408	9 1/7	.03799 53186	.96108 19340
3 2/7	.01404 02573	.51662 97960	9 2/7	.03856 33951	.96781 53166
3 3/7	.01464 05262	.53511 32017	9 3/7	.03913 07296	.97444 58955
3 4/7	.01523 99666	.55284 19687	9 4/7	.03969 73239	.98097 67627
3 5/7	.01583 85807	.56987 53080	9 5/7	.04026 31800	.98741 08727
3 6/7	.01643 63708	.58626 57241	9 6/7	.04082 82998	.99375 10507
4	.01703 33393	.60205 99913	10	.04139 26852	$\bar{1}$.00000 00000
4 1/7	.01762 94883	.61729 99579	10 1/7	.04195 63380	.00616 03087
4 2/7	.01822 48201	.63202 32147	10 2/7	.04251 92603	.01223 44564
4 3/7	.01881 93369	.64626 36538	16 3/7	.04308 14539	.01822 48201
4 4/7	.01941 30410	.66005 19383	10 4/7	.04364 29207	.02413 36797
4 5/7	.02000 59346	.67341 58999	10 5/7	.04420 36625	.02996 32234
4 6/7	.02059 80199	.68638 08770	10 6/7	.04476 36812	.03571 55523
5	.02118 92991	.69897 00043	11	.04532 29788	.04139 26852
5 1/7	.02177 97743	.71120 44608	11 1/7	.04588 15569	.04699 65627
5 2/7	.02236 94478	.72310 36841	11 2/7	.04643 94177	.05252 90513
5 3/7	.02295 83218	.73468 55566	11 3/7	.04699 65627	.05799 19470
5 4/7	.02354 63984	.74596 65670	11 4/7	.04755 29939	.06338 69789
5 5/7	.02413 36797	.75696 19513	11 5/7	.04810 87130	.06871 58124
5 6/7	.02472 01680	.76768 58197	11 6/7	.04866 37220	.07398 00524
6	.02530 58653	.77815 12504	12	.04921 80227	.07918 12460

1/7 % = 0.00142857142857.....	4/7 % = 0.00571428571428.....
2/7 % = 0.00285714285714.....	5/7 % = 0.00714285714285.....
3/7 % = 0.00428571428571.....	6/7 % = 0.00857142857142.....

Taxa %	log (1+t)	log t	Taxa %	log (1+t)	log t
1/8	0.00054 25291	$\bar{3}$.09691 00130	6 1/8	0.02581 77033	$\bar{2}$.78710 60930
1/4	.00108 43813	.39794 00087	6 1/4	.02632 89387	.79588 00173
3/8	.00162 55583	.57403 12677	6 3/8	.02683 95731	.80448 01891
1/2	.00216 60618	.69897 00043	6 1/2	.02734 96078	.81291 33566
5/8	.00270 58934	.79588 00173	6 5/8	.02785 90442	.82118 58826
3/4	.00324 50548	.87506 12634	6 3/4	.02836 78837	.82930 37728
7/8	.00378 35477	.94200 80530	6 7/8	.02887 61277	.83727 27025
1 1/8	.00485 85346	$\bar{2}$.05115 25224	7 1/8	.02989 08349	.85278 48687
1 1/4	.00539 50319	.09691 00130	7 1/4	.03039 73009	.86033 80066
1 3/8	.00593 08672	.13830 26982	7 3/8	.03090 31768	.86776 20247
1 1/2	.00646 60422	.17609 12591	7 1/2	.03140 84643	.87506 12634
1 5/8	.00700 05586	.21085 33653	7 5/8	.03191 31645	.88223 98480
1 3/4	.00753 44179	.24303 80487	7 3/4	.03241 72788	.88930 17025
1 7/8	.00806 76217	.27300 12721	7 7/8	.03292 08087	.89625 05625
2 1/8	.00913 20695	.32735 89344	8 1/8	.03392 61205	.90982 33696
2 1/4	.00966 33167	.35218 25181	8 1/4	.03442 79050	.91645 39485
2 3/8	.01019 39148	.37566 36140	8 3/8	.03492 91105	.92298 48157
2 1/2	.01072 38654	.39794 00087	8 1/2	.03542 97382	.92941 89257
2 5/8	.01125 31701	.41912 93077	8 5/8	.03592 97895	.93575 91037
2 3/4	.01178 18305	.43933 26938	8 3/4	.03642 92656	.94200 80530
2 7/8	.01230 98482	.45863 78490	8 7/8	.03692 81680	.94816 83617
3 1/8	.01336 39616	.49485 00217	9 1/8	.03792 42567	.96023 28731
3 1/4	.01389 00603	.51188 33610	9 1/4	.03842 14456	.96614 17327
3 3/8	.01441 55226	.52827 37772	9 3/8	.03891 80660	.97197 12764
3 1/2	.01494 03498	.54406 80444	9 1/2	.03941 41192	.97772 36053
3 5/8	.01546 45436	.55930 80109	9 5/8	.03990 96064	.98340 07382
3 3/4	.01598 81054	.57403 12677	9 3/4	.04040 45289	.98900 46157
3 7/8	.01651 10368	.58827 17068	9 7/8	.04089 88881	.99453 71043
4 1/8	.01755 50144	.61542 39529	10 1/8	.04188 59214	$\bar{1}$.00539 50319
4 1/4	.01807 60636	.62838 89301	10 1/4	.04237 85981	.01072 38654
4 3/8	.01859 64885	.64097 80574	10 3/8	.04287 07166	.01598 81054
4 1/2	.01911 62904	.65321 25138	10 1/2	.04336 22780	.02118 92991
4 5/8	.01963 54710	.66511 17371	10 5/8	.04385 32837	.02632 89387
4 3/4	.02015 40316	.67669 36096	10 3/4	.04434 37349	.03140 84643
4 7/8	.02067 19738	.68797 46200	10 7/8	.04483 36328	.03642 92656
5 1/8	.02170 60088	.70969 38697	11 1/8	.04581 17740	.04630 00197
5 1/4	.02222 21045	.72015 93034	11 1/4	.04630 00197	.05115 25224
5 3/8	.02273 75876	.73037 84686	11 3/8	.04678 77170	.05595 14053
5 1/2	.02325 24596	.74036 26895	11 1/2	.04727 48674	.06069 78404
5 5/8	.02376 67220	.75012 25268	11 5/8	.04776 14719	.06539 29616
5 3/4	.02428 03760	.75966 78447	11 3/4	.04824 75318	.07003 78666
5 7/8	.02479 34233	.76900 78709	11 7/8	.04873 30483	.07463 36183

1/8 % = 0.00125	3/8 % = 0.00375	3/4 % = 0.0075
1/4 % = 0.0025	1/2 % = 0.005	7/8 % = 0.00875
	5/8 % = 0.00625	

Taxa %	log (1+t)	log t	Taxa %	log (1+t)	log t
1/9	0.00048 22815	$\bar{3}$.04575 74906	5 1/9	0.02164 86270	$\bar{2}$.70851 53222
2/9	.00096 40281	.34678 74862	5 2/9	.02210 74696	.71785 53485
1/3	.00144 52409	.52287 87453	5 1/3	.02256 58279	.72699 87279
4/9	.00192 59210	.64781 74819	5 4/9	.02302 37030	.73595 35706
5/9	.00240 60693	.74472 74949	5 5/9	.02348 10958	.74472 74949
2/3	.00288 56882	.82390 87409	5 2/3	.02393 80075	.75332 76667
7/9	.00336 47776	.89085 55306	5 7/9	.02439 44389	.76176 08342
8/9	.00384 33391	.94884 74776	5 8/9	.02485 03912	.77003 33602
1 1/9	.00479 88829	$\bar{2}$.04575 74906	6 1/9	.02576 08621	.78612 01801
1 2/9	.00527 58675	.08715 01757	6 2/9	.02621 53828	.79394 55176
1 1/3	.00575 23289	.12493 87366	6 1/3	.02666 94283	.80163 23462
1 4/9	.00622 82681	.15970 08429	6 4/9	.02712 29996	.80918 54841
1 5/9	.00670 36863	.19188 55262	6 5/9	.02757 60977	.81660 95022
1 2/3	.00717 85846	.22184 87496	6 2/3	.02802 87236	.82390 87409
1 7/9	.00765 29642	.24987 74732	6 7/9	.02848 08782	.83108 73256
1 8/9	.00812 68262	.27620 64119	6 8/9	.02893 25626	.83814 91801
2 1/9	.00907 30019	.32451 10915	7 1/9	.02983 45245	.85193 74645
2 2/9	.00954 53179	.34678 74862	7 2/9	.03028 48039	.85867 08472
2 1/3	.01001 71208	.36797 67853	7 1/3	.03073 46170	.86530 14261
2 4/9	.01048 84116	.38818 01714	7 4/9	.03118 39646	.87183 22933
2 5/9	.01095 91916	.40748 53266	7 5/9	.03163 28479	.87826 64033
2 2/3	.01142 94618	.42596 87323	7 2/3	.03208 12676	.88460 65813
2 7/9	.01189 92233	.44369 74992	7 7/9	.03252 92248	.89085 55306
2 8/9	.01236 84772	.46073 08385	7 8/9	.03297 67205	.89701 58393
3 1/9	.01330 54668	.49291 55219	8 1/9	.03387 03308	.90908 03507
3 2/9	.01377 32046	.50815 54885	8 2/9	.03431 64474	.91498 92103
3 1/3	.01424 04391	.52287 87453	8 1/3	.03476 21063	.92081 87540
3 4/9	.01470 71715	.53711 91844	8 4/9	.03520 73082	.92657 10828
3 5/9	.01517 34029	.55090 74689	8 5/9	.03565 20543	.93224 82157
3 2/3	.01563 91343	.56427 14304	8 2/3	.03609 63453	.93785 20933
3 7/9	.01610 43668	.57723 64076	8 7/9	.03654 01824	.94338 45819
3 8/9	.01656 91014	.58982 55349	8 8/9	.03698 35563	.94884 74776
4 1/9	.01749 70814	.61395 92146	9 1/9	.03786 89783	.95957 13429
4 2/9	.01796 03289	.62554 10872	9 2/9	.03831 10084	.96483 55829
4 1/3	.01842 30828	.63682 20976	9 1/3	.03875 25890	.97003 67766
4 4/9	.01888 53442	64781 74819	9 4/9	.03919 37210	.97517 64163
4 5/9	.01934 71140	.65854 13473	9 5/9	.03963 44055	.98025 59418
4 2/3	.01980 83934	.66900 67810	9 2/3	.04007 46432	.98527 67432
4 7/9	.02026 91833	.67922 59461	9 7/9	.04051 44351	.99024 01627
4 8/9	.02072 94849	.68921 01670	9 8/9	.04095 37822	.99514 74972

1/9 % = 0.001111.....	5/9 % = 0.005555..... ....
2/9 % = 0.002222	6/9 % = 0.006666.....
3/9 % = 0 003333.....	7/9 % = 0.007777.....
4/9 % = 0.004444.....	8/9 % = 0.008888.....

Taxa %	log (1+t)	log t	Taxa %	log (1+t)	log t
1/10	0.00043 40775	$\bar{3}$.00000 00000	5 1/10	0.02160 27160	$\bar{2}$.70757 01761
2/10	.00086 77215	.30102 99957	5 2/10	.02201 57398	.71600 33436
3/10	.00130 09330	.47712 12547	5 3/10	.02242 83712	.72427 58696
4/10	.00173 37128	.60205 99913	5 4/10	.02284 06109	.73239 37598
6/10	.00259 79807	.77815 12504	5 6/10	.02366 39182	.74818 80270
7/10	.00302 94706	.84509 80400	5 7/10	.02407 49873	.75587 48557
8/10	.00346 05321	.90308 99870	5 8/10	.02448 56677	.76342 79936
9/10	.00389 11662	.95424 25094	5 9/10	.02489 59601	.77085 20116
1 1/10	.00475 11556	$\bar{2}$.04139 26852	6 1/10	.02571 53839	.78532 98350
1 2/10	.00518 05125	.07918 12460	6 2/10	.02612 45167	.79239 16895
1 3/10	.00560 94454	.11394 33523	6 3/10	.02653 32645	.79934 05495
1 4/10	.00603 79550	.14612 80357	6 4/10	.02694 16280	.80617 99740
1 6/10	.00689 37079	.20411 99827	6 6/10	.02775 72047	.81954 39355
1 7/10	.00732 09529	.23044 89214	6 7/10	.02816 44194	.82607 48027
1 8/10	.00774 77780	.25527 25051	6 8/10	.02857 12527	.83250 89127
1 9/10	.00817 41840	.27875 36010	6 8/10	.02897 77052	.83884 90907
2 1/10	.00902 57421	.32221 92947	7 1/10	.02978 94708	.85125 83487
2 2/10	.00945 08958	.34242 26808	7 2/10	.03019 47854	.85733 24964
2 3/10	.00987 56337	.36172 78360	7 3/10	.03059 97220	.86332 28601
2 4/10	.01029 99565	.38021 12417	7 4/10	.03100 42814	.86923 17197
2 6/10	.01114 73608	.41497 33480	7 6/10	.03181 22713	.88081 35923
2 7/10	.01157 04436	.43136 37642	7 7/10	.03221 57033	.88649 07252
2 8/10	.01199 31147	.44715 80313	7 8/10	.03261 87609	.89209 46027
2 9/10	.01241 53748	.46239 79979	7 9/10	.03302 14447	.89762 70913
3 1/10	.01325 86653	.49136 16938	8 1/10	.03382 56940	.90848 50189
3 2/10	.01367 96973	.50514 99783	8 2/10	.03422 72608	.91381 38524
3 3/10	.01410 03215	.51851 39399	8 3/10	.03462 84566	.91907 80924
3 4/10	.01452 05388	.53147 89170	8 4/10	.03502 92822	.92427 02861
3 6/10	.01535 97554	.55630 25008	8 6/10	.03582 98253	.93449 84512
3 7/10	.01577 87564	.56820 17241	8 7/10	.03622 95441	.93951 92526
3 8/10	.01619 73535	.57978 35966	8 8/10	.03662 88954	.94448 26722
3 9/10	.01661 55476	.59106 46070	8 9/10	.03702 78798	.94939 00066
4 1/10	.01745 07295	.61278 38567	9 1/10	.03782 47506	.95904 13923
4 2/10	.01786 77190	.62324 92904	9 2/10	.03822 26384	.96378 78273
4 3/10	.01828 43084	.63346 84556	9 3/10	.03862 01619	.96848 29486
4 4/10	.01870 04987	.64345 26765	9 4/10	.03901 73220	.97312 78536
4 6/10	.01953 16845	.66275 78317	9 6/10	.03981 05541	.98227 12330
4 7/10	.01994 66817	.67209 78579	9 7/10	.04020 66276	.98677 17343
4 8/10	.02036 12826	.68124 12374	9 8/10	.04060 23401	.99122 60757
4 9/10	.02077 54882	.69019 60800	9 9/10	.04099 76924	.99563 51946

1/10 % = 0.001	4/10 % = 0.004	7/10 % = 0.007
2/10 % = 0.002	5/10 % = 0.005	8/10 % = 0.008
3/10 % = 0.003	6/10 % = 0.006	9/10 % = 0.009

Taxa %	log (1+t)	log t	Taxa %	log (1+t)	log t
1/11	0.00039 46338	$\bar{4}$.95860 73148	4 6/11	0.01930 51552	$\bar{2}$.65757 73192
2/11	.00078 89094	$\bar{3}$.25963 73105	4 7/11	.01968 26385	.66617 74909
3/11	.00118 28273	.43572 85696	4 8/11	.02005 97939	.67461 06585
4/11	.00157 63882	.56066 73062	4 9/11	.02043 66221	.68288 31844
5/11	.00196 95929	.65757 73192	4 10/11	.02081 31237	.69100 10747
6/11	.00236 24418	.73675 85652	5 1/11	.02156 51489	.70679 53419
7/11	.00275 49357	.80370 53549	5 2/11	.02194 06738	.71448 21705
8/11	.00314 70752	.86169 73018	5 3/11	.02231 58742	.72203 53084
9/11	.00353 88610	.91284 98243	5 4/11	.02269 07508	.72945 93265
10/11	.00393 02936	.95860 73148	5 5/11	.02306 53041	.73675 85652
1 1/11	.00471 21021	$\bar{2}$.03778 85609	5 6/11	.02343 95346	.74393 71499
1 2/11	.00510 24792	.07255 06672	5 7/11	.02381 34429	.75099 90043
1 3/11	.00549 25057	.10473 53505	5 8/11	.02418 70296	.75794 78643
1 4/11	.00588 21822	.13469 85739	5 9/11	.02456 02952	.76478 72888
1 5/11	.00627 15095	.16272 72975	5 10/11	.02493 32402	.77152 06715
1 6/11	.00666 04880	.18905 62362	6 1/11	.02567 81709	.78468 21175
1 7/11	.00704 91184	.21387 98199	6 2/11	.02605 01576	.79111 62275
1 8/11	.00743 74014	.23736 09158	6 3/11	.02642 18260	.79745 64056
1 9/11	.00782 53375	.25963 73105	6 4/11	.02679 31766	.80370 53549
1 10/11	.00821 29274	.28082 66096	6 5/11	.02716 42099	.80986 56636
2 1/11	.00898 70711	.32033 51509	6 6/11	.02753 49265	.81593 98113
2 2/11	.00937 36261	.33881 85566	6 7/11	.02790 53270	.82193 01750
2 3/11	.00975 98373	.35654 73235	6 8/11	.02827 54118	.82783 90346
2 4/11	.01014 57054	.37358 06628	6 9/11	.02864 51814	.83366 85782
2 5/11	.01053 12309	.38997 10790	6 10/11	.02901 46366	.83942 09071
2 6/11	.01091 64145	.40576 53462	7 1/11	.02975 26053	.85070 19175
2 7/11	.01130 12568	.42100 53127	7 2/11	.03012 11199	.85623 44061
2 8/11	.01168 57583	.43572 85696	7 3/11	.03048 93221	.86169 73018
2 9/11	.01206 99198	.44996 90087	7 4/11	.03085 72125	.86709 23337
2 10/11	.01245 37417	.46375 72932	7 5/11	.03122 47914	.87242 11672
3 1/11	.01322 03694	.49008 62319	7 6/11	.03159 20595	.87768 54072
3 2/11	.01360 31764	.50267 53592	7 7/11	.03195 90172	.88288 66009
3 3/11	.01398 56462	.51490 98156	7 8/11	.03232 56652	.88802 62406
3 4/11	.01436 77795	.52680 90389	7 9/11	.03269 20039	.89310 57661
3 5/11	.01474 95769	.53839 09115	7 10/11	.03305 80338	.89812 65675
3 6/11	.01513 10389	.54967 19219	8 1/11	.03378 91695	.90799 73215
3 7/11	.01551 21662	.56066 73062	8 2/11	.03415 42762	.91284 98243
3 8/11	.01589 29593	.57139 11716	8 3/11	.03451 90763	.91764 87072
3 9/11	.01627 34188	.58185 66052	8 4/11	.03488 35702	.92239 51422
3 10/11	.01665 35452	.59207 57704	8 5/11	.03524 77585	.92709 02634
4 1/11	.01741 28015	.61181 98286	8 6/11	.03561 16416	.93173 51684
4 2/11	.01779 19325	.62136 51465	8 7/11	.03597 52201	.93633 09201
4 3/11	.01817 07327	.63070 51728	8 8/11	.03633 84945	.94087 85479
4 4/11	.01854 92029	.63984 85522	8 9/11	.03670 14653	.94537 90491
4 5/11	.01892 73435	.64880 33949	8 10/11	.03706 41329	.94983 33905

1/11 % = 0.0009090...	4/11 % = 0.003636....	7/11 % = 0.006363....
2/11 % = 0.001818....	5/11 % = 0.004545....	8/11 % = 0.007272....
3/11 % = 0.002727....	6/11 % = 0.005454....	9/11 % = 0.008181....

Taxa %	log (1+t)	log t	Taxa %	log (1+t)	log t
1/12	0.00036 17614	.$\bar{4}$92081 87540	5 1/12	0.02153 38405	$\bar{2}$.70614 85890
1/6	.00072 32216	.$\bar{3}$22184 87496	5 1/6	.02187 81089	.71321 04435
1/3	.00144 52409	.52287 87453	5 1/3	.02256 58279	.72699 87279
5/12	.00180 58009	.61978 87583	5 5/12	.02290 92795	.73373 21106
7/12	.00252 60240	.76591 67940	5 7/12	.02359 53688	.74689 35567
2/3	.00288 56882	.82390 87409	5 2/3	.02393 80075	.75332 76667
5/6	.00360 41243	.92081 87540	5 5/6	.02462 24749	.76591 67940
11/12	.00396 28971	.96221 14391	5 11/12	.02496 43045	.77207 71027
1 1/12	.00467 95548	$\bar{2}$.03476 21063	6 1/12	.02564 71576	.78414 16141
1 1/6	.00503 74407	.06694 67896	6 1/6	.02598 81820	.79005 04737
1 1/3	.00575 23289	.12493 87366	6 1/3	.02666 94283	.80163 23462
1 5/12	.00610 93322	.15126 76753	6 5/12	.02700 96512	.80730 94791
1 7/12	.00682 24596	.19957 23549	6 7/12	.02768 92984	.81844 58453
1 2/3	.00717 85846	.22184 87496	6 2/3	.02802 87236	.82390 87409
1 5/6	.00788 99599	.26324 14348	6 5/6	.02870 67791	.83463 26063
1 11/12	.00824 52110	.28254 65900	6 11/12	.02904 54103	.83989 68463
2 1/12	.00895 48427	.31875 87626	7 1/12	.02972 18816	.85023 76797
2 1/6	.00930 92241	.33579 21019	7 1/6	.03005 97225	.85531 72052
2 1/3	.01001 71208	.36797 67853	7 1/3	.03073 46170	.86530 14261
2 5/12	.01037 06368	.38321 67519	7 5/12	.03107 16713	.87020 87606
2 7/12	.01107 68069	41218 04478	7 7/12	.03174 49962	.87986 01463
2 2/3	.01142 94618	.42596 87323	7 2/3	.03208 12676	.88460 65813
2 5/6	.01213 39136	.45229 76710	7 5/6	.03275 30303	.89394 66076
2 11/12	.01248 57115	.46488 67983	7 11/12	.03308 85224	.89854 23592
3 1/12	.01318 84536	.48902 04780	8 1/12	.03375 87300	.90759 04882
3 1/6	.01353 93986	.50060 23506	8 1/6	.03409 34464	.91204 48296
3 1/3	.01424 04391	.52287 87453	8 1/3	.03476 21063	.92081 87540
3 5/12	.01459 05355	.53360 26107	8 5/12	.03509 60505	.92514 01277
3 7/12	.01528 98826	.55428 72095	8 7/12	.03576 31697	.93365 59787
3 2/3	.01563 91343	.56427 14304	8 2/3	.03609 63453	.93785 20933
3 5/6	.01633 67963	.58357 65856	8 5/6	.03676 19309	.94612 46192
3 11/12	.01668 52074	.59291 66119	8 11/12	.03709 43415	.95020 25316
4 1/12	.01738 11923	.61101 48340	9 1/12	.03775 84005	.95824 52519
4 1/6	.01772 87670	.61978 87583	9 1/6	.03809 00496	.96221 14391
4 1/3	.01842 30828	.63682 20976	9 1/3	.03875 25890	.97003 67766
4 5/12	.01876 98249	.64509 46236	9 5/12	.03908 34800	.97389 71974
4 7/12	.01946 24798	.66118 14434	9 7/12	.03974 45068	.98151 65943
4 2/3	.01980 83934	.66900 67810	9 2/3	.04007 46432	.98527 67432
4 5/6	.02049 93951	.68424 67475	9 5/6	.04073 41642	.99270 07613
4 11/12	.02084 44841	.69167 07656	9 11/12	.04106 35495	.99636 57153

1/12 % = 0.0008333.....	7/12 % = 0.0058333.....
1/6 % = 0.0016333.....	2/3 % = 0.0066666.....
1/3 % = 0.0033333.....	5/6 % = 0.0083333.....
5/12 % = 0.0041666.....	11/12 % = 0.0091666.....

TABOA — VIII

Esta Taboa fornece os logarithmos com 8 decimaes dos logarithmos de $(1+t)$, sendo t a taxa de juro que é indicada ao lado esquerdo. (Veja Secç. I, § 1º).

Para 78 taxas diversas.

A caracteristica expressa de um logarithmo pertencerá a todos os logarithmos seguintes emquanto outra não estiver expressa.

Taxa %	Log [log (1+*t*)]	Taxa %	Log [log (1+*t*)]
1/8	$\bar{4}$.734 42303	5 1/8	$\bar{2}$.336 57997
1/4	$\bar{3}$.035 18202	5 1/4	.346 78519
3/8	.211 00255	5 3/8	.356 74439
1/2	.335 67083	5 1/2	.366 46890
5/8	.432 31068	5 5/8	.375 96929
3/4	.511 22204	5 3/4	.385 25541
7/8	.577 89921	5 7/8	.394 33650
1	.635 62183	6	.403 22119
1 1/8	.686 50530	6 1/8	.411 91760
1 1/4	.731 99402	6 1/4	.420 43335
1 3/8	.773 11820	6 3/8	.428 77560
1 1/2	.810 63854	6 1/2	.436 95110
1 5/8	.845 13270	6 5/8	.444 96621
1 3/4	.877 04970	6 3/4	.452 82694
1 7/8	.906 74553	6 7/8	.460 53895
2	.934 50712	7	.468 10763
2 1/8	.960 56921	7 1/8	.475 53805
2 1/4	.985 12621	7 1/4	.482 83502
2 3/8	$\bar{2}$.008 34100	7 3/8	.490 00313
2 1/2	.030 35135	7 1/2	.497 04670
2 5/8	.051 27488	7 5/8	.503 96987
2 3/4	.071 21277	7 3/4	.510 77656
2 7/8	.090 25270	7 7/8	.517 47050
3	.108 47114	8	.524 05525
3 1/8	.125 93522	8 1/8	.530 53420
3 1/4	.142 70413	8 1/4	.536 91060
3 3/8	.158 83039	8 3/8	.543 18753
3 1/2	.174 36077	8 1/2	.549 36794
3 5/8	.189 33711	8 3/4	.561 45042
3 3/4	.203 79700		
3 7/8	.217 77435	9	.573 17919
		9 1/4	.584 57370
		9 1/2	.595 65183
4	.231 29980	9 3/4	.606 43005
4 1/8	.244 40119		
4 1/4	.257 10386	10	.616 92360
4 3/8	.269 43095	10 1/2	.637 11209
4 1/2	.281 40362		
4 5/8	.293 04132		
4 3/4	.304 36194	11	.656 31845
4 7/8	.315 38195		
5	.326 11659	12	.692 12416

TABOA — IX

Esta Taboa mostra o tempo em que deve realizar-se a amortização de um capital mutuado de que se paga o juro á taxa t annual indicada á margem, e a porcentagem p para amortização indicada no alto da columna.

A sua expressão (veja-se Secç. III, § 3º) é:

$$n = \frac{\log\left(\frac{t+p}{p}\right)}{\log r}.$$

TAXA DO JURO %	Taxa da amortização										TAXA DO JURO %
	1/10 %		1/5 %		1/4 %		3/10 %		2/5 %		
	0.001		0.002		0.0025		0.003		0.004		
	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	
2	153	267	121	32	110	344	102	309	90	173	2
2 1/8	147	194	116	239	107	23	99	139	87	225	2 1/8
2 1/4	141	318	112	218	103	174	96	65	84	253	2 1/4
2 3/8	136	254	108	311	100	64	93	77	82	187	2 3/8
2 1/2	131	340	105	145	97	40	90	104	80	81	2 1/2
2 5/8	127	199	102	69	94	93	87	319	78	29	2 5/8
2 3/4	123	174	99	73	91	215	85	175	76	25	2 3/4
2 7/8	119	252	96	148	89	39	83	35	74	65	2 7/8
3	116	63	93	288	86	279	81	44	72	144	3
3 1/8	112	317	91	125	84	209	79	48	70	259	3 1/8
3 1/4	109	286	89	15	82	185	77	93	69	47	3 1/4
3 3/8	106	322	86	312	80	203	75	175	67	225	3 3/8
3 1/2	104	60	84	294	78	259	73	289	66	71	3 1/2
3 5/8	101	214	82	315	76	350	72	76	64	302	3 5/8
3 3/4	99	59	81	12	75	113	70	251	63	197	3 3/4
3 7/8	96	311	79	103	73	266	69	93	62	113	3 7/8
4	94	246	77	225	72	86	67	319	61	50	4
4 1/8	92	221	76	16	70	291	66	208	60	5	4 1/8
4 1/4	90	232	74	193	69	160	65	118	58	338	4 1/4
4 3/8	88	277	73	35	68	51	64	48	57	327	4 3/8
4 1/2	86	353	71	260	66	322	62	356	56	332	4 1/2
4 5/8	85	99	70	146	65	252	61	321	55	351	4 5/8
4 3/4	83	232	69	53	64	200	60	302	55	23	4 3/4
4 7/8	82	29	67	338	63	164	59	298	54	68	4 7/8
5	80	211	66	280	62	144	58	309	53	124	5
5 1/8	79	55	65	239	61	139	57	333	52	192	5 1/8
5 1/4	77	280	64	213	60	147	57	8	51	270	5 1/4
5 3/8	76	164	63	202	59	169	56	56	50	358	5 3/8
5 1/2	75	66	62	204	58	203	55	115	50	95	5 1/2
5 5/8	73	345	61	220	57	248	54	184	49	202	5 5/8
5 3/4	72	281	60	247	56	304	53	263	48	317	5 3/4
5 7/8	71	232	59	286	56	11	52	352	48	80	5 7/8
6	70	198	58	336	55	87	52	90	47	210	6
6 1/4	68	170	57	107	53	267	50	310	46	132	6 1/4
6 1/2	66	191	55	274	52	121	49	201	45	80	6 1/2
6 3/4	64	256	54	115	51	5	48	119	44	52	6 3/4
7	63	1	52	347	49	277	47	63	43	45	7
7 1/2	59	318	50	172	47	174	45	18	41	90	7 1/2
8	57	36	48	91	45	156	43	51	39	201	8
8 1/2	54	216	46	89	43	209	41	150	38	10	8 1/2
9	52	124	44	154	41	324	39	305	36	228	9
10	48	152	41	91	38	347	37	36	34	66	10

TAXA DO JURO %	Taxa da amortização										TAXA DO JURO %
	1/2 %		3/5 %		7/10 %		3/4 %		4/5 %		
	0.005		0.006		0.007		0.0075		0.008		
	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	
2	81	99	74	17	68	61	65	220	63	94	2
2 1/8	78	310	71	348	66	126	63	325	61	236	2 1/8
2 1/4	76	222	70	10	64	234	62	110	60	53	2 1/4
2 3/8	74	188	68	76	63	19	60	288	58	262	2 3/8
2 1/2	72	203	66	183	61	198	59	138	57	140	2 1/2
2 5/8	70	261	64	326	60	48	58	17	56	45	2 5/8
2 2/4	68	359	63	142	58	287	56	282	54	334	2 3/4
2 7/8	67	133	61	348	57	191	55	211	53	285	2 7/8
3	65	290	60	222	56	118	54	162	52	257	3
3 1/8	64	136	59	121	55	68	53	133	51	248	3 1/8
3 1/4	63	000	58	44	54	37	52	122	50	256	3 1/4
3 3/8	61	249	56	348	53	25	51	129	49	280	3 3/8
3 1/2	60	161	55	311	52	30	50	152	48	319	3 1/2
3 5/8	59	94	54	293	51	51	49	190	48	12	3 5/8
3 3/4	58	47	53	293	50	87	48	241	47	78	3 3/4
3 7/8	57	19	52	308	49	137	47	306	46	157	3 7/8
4	56	8	51	336	48	199	47	22	45	246	4
4 1/8	55	3	51	19	47	273	46	110	44	346	4 1/8
4 1/4	54	33	50	75	46	359	45	209	44	97	4 1/4
4 3/8	53	66	49	144	46	95	44	317	43	216	4 3/8
4 1/2	52	112	48	223	45	201	44	75	42	345	4 1/2
4 5/8	51	171	47	313	44	316	43	202	42	121	4 5/8
4 3/4	50	241	47	53	44	80	42	337	41	266	4 3/4
4 7/8	49	322	46	162	43	213	42	119	41	58	4 7/8
5	49	53	45	261	42	354	41	260	40	217	5
5 1/8	48	154	45	48	42	142	41	66	40	23	5 1/8
5 1/4	47	263	44	182	41	297	40	230	39	194	5 1/4
5 3/8	47	22	43	324	41	98	40	40	39	12	5 3/8
5 1/2	46	148	43	113	40	266	39	216	38	196	5 1/2
5 5/8	45	283	42	269	40	80	39	38	38	25	5 5/8
5 3/4	45	64	42	71	39	260	38	225	37	219	5 3/4
5 7/8	44	212	41	240	39	85	38	58	37	58	5 7/8
6	44	7	41	55	38	275	37	255	36	62	6
6 1/4	42	335	40	60	37	311	36	304	35	323	6 1/4
6 1/2	41	326	39	85	37	4	36	9	35	40	6 1/2
6 3/4	40	338	38	129	36	74	35	90	34	132	6 3/4
7	40	9	37	190	35	159	34	186	33	237	7
7 1/2	38	121	35	356	34	10	33	56	32	125	7 1/2
8	36	293	34	215	32	268	31	322	31	57	8
8 1/2	35	155	33	119	31	207	30	286	30	25	8 1/2
9	34	60	32	62	30	182	29	275	29	27	9
10	31	340	30	47	28	220	27	337	27	110	10

TAXA DO JURO %	Taxa da amortização										TAXA DO JURO %
	9/10 %		1 %		1 1/10 %		1 1/5 %		1 1/4 %		
	0 009		0,01		0.011		0.012		0.0125		
	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	
2	59	31	55	175	52	115	49	190	48	90	2
2 1/8	57	235	54	69	51	55	48	168	47	85	2 1/8
2 1/4	56	109	52	355	50	18	47	165	46	99	2 1/4
2 3/8	55	11	51	300	49	2	46	183	45	130	2 3/8
2 1/2	53	298	50	268	48	5	45	216	44	177	2 1/2
2 5/8	52	248	49	256	47	26	44	266	43	239	2 5/8
2 3/4	51	219	48	263	46	64	43	330	42	315	2 3/4
2 7/8	50	210	47	288	45	117	43	47	42	44	2 7/8
3	49	219	46	328	44	184	42	137	41	145	3
3 1/8	48	244	46	19	43	264	41	239	40	257	3 1/8
3 1/4	47	284	45	88	42	356	40	352	40	18	3 1/4
3 3/8	46	339	44	169	42	99	40	115	39	150	3 3/8
3 1/2	46	47	43	263	41	212	39	247	38	290	3 1/2
3 5/8	45	127	43	3	40	336	39	28	38	80	3 5/8
3 3/4	44	219	42	118	40	109	38	177	37	236	3 3/4
3 7/8	43	322	41	244	39	250	37	334	37	41	3 7/8
4	43	74	41	13	39	40	37	139	36	212	4
4 1/8	42	196	40	156	38	197	36	311	36	31	4 1/8
4 1/4	41	327	39	306	38	1	36	129	35	216	4 1/4
4 3/8	41	107	39	100	37	173	35	313	35	46	4 3/8
4 1/2	40	254	38	266	36	351	35	144	34	241	4 1/2
4 5/8	40	49	38	74	36	174	34	339	34	82	4 5/8
4 3/4	39	211	37	253	36	4	34	180	33	289	4 3/4
4 7/8	39	19	37	73	35	169	34	26	33	140	4 7/8
5	38	194	36	264	35	40	33	237	32	355	5
5 1/8	38	15	36	96	34	245	33	93	32	215	5 1/8
5 1/4	37	201	35	297	34	94	32	312	32	78	5 1/4
5 3/8	37	33	35	139	33	309	32	176	31	307	5 3/8
5 1/2	36	230	34	350	33	168	32	44	31	179	5 1/2
5 5/8	36	72	34	201	33	30	31	275	31	54	5 5/8
5 3/4	35	278	34	57	32	257	31	150	30	293	5 3/4
5 7/8	35	129	33	281	32	127	31	28	30	175	5 7/8
6	34	344	33	144	32	1	30	270	30	60	6
6 1/4	34	67	32	247	31	119	30	43	29	200	6 1/4
6 1/2	33	164	31	363	30	249	29	186	28	350	6 1/2
6 3/4	32	275	31	127	30	31	28	341	28	151	6 3/4
7	32	38	30	268	29	183	28	146	27	321	7
7 1/2	30	318	29	213	28	157	27	141	26	326	7 1/2
8	29	278	28	201	27	164	26	169	26	2	8
8 1/2	28	273	27	215	26	201	25	222	25	65	8 1/2
9	27	297	26	262	25	263	24	300	24	150	9
10	26	61	25	58	24	92	23	156	24	19	10

TAXA DO JURO %	Taxa da amortização										TAXA DO JURO %
	1 1/2 %		1 3/5 %		1 3/4 %		1 4/5 %		2 %		
	0.015		0.016		0.175		0.018		0.02		
	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	
2	42	283	40	342	38	176	37	264	35	1	2
2 1/8	41	347	40	68	37	290	37	27	34	154	2 1/8
2 1/4	41	65	39	167	37	55	36	160	33	316	2 1/4
2 3/8	40	156	38	277	36	190	35	304	33	125	2 3/8
2 1/2	39	259	38	38	35	336	35	96	32	302	2 1/2
2 5/8	39	15	37	171	35	130	34	257	32	127	2 5/8
2 3/4	38	140	36	312	34	293	34	66	31	318	2 3/4
2 7/8	37	275	36	102	34	104	33	242	31	156	2 7/8
3	37	60	35	262	33	282	33	66	31	000	3
3 1/8	36	213	35	69	33	106	32	255	30	209	3 1/8
3 1/4	36	14	34	243	32	297	32	92	30	63	3 1/4
3 3/8	35	183	34	64	32	134	31	294	29	282	3 3/8
3 1/2	34	359	33	251	31	337	31	141	29	146	3 1/2
3 5/8	34	182	33	85	31	185	30	354	29	14	3 5/8
3 3/4	34	11	32	284	31	38	30	211	28	247	3 3/4
3 7/8	33	205	32	129	30	256	30	73	28	124	3 7/8
4	33	46	31	339	30	119	29	300	28	4	4
4 1/8	32	252	31	194	29	346	29	171	27	248	4 1/8
4 1/4	32	102	31	53	29	217	29	46	27	136	4 1/4
4 3/8	31	318	30	277	29	92	28	284	27	26	4 3/8
4 1/2	31	178	30	145	28	331	28	166	26	280	4 1/2
4 5/8	31	42	30	17	28	214	28	51	26	177	4 5/8
4 3/4	30	272	29	253	28	100	27	300	26	77	4 3/4
4 7/8	30	143	29	132	27	349	27	192	25	339	4 7/8
5	30	19	29	16	27	241	27	87	25	244	5
5 1/8	29	259	28	162	27	136	26	345	25	151	5 1/8
5 1/4	29	142	28	151	27	33	26	245	25	61	5 1/4
5 3/8	29	28	28	43	26	294	26	148	24	333	5 3/8
5 1/2	28	278	27	299	26	197	26	54	24	247	5 1/2
5 5/8	28	170	27	197	26	103	25	322	24	163	5 5/8
5 3/4	28	65	27	97	26	11	25	232	24	82	5 3/4
5 7/8	27	323	27	1	25	281	25	145	24	2	5 7/8
6	27	224	26	267	25	193	25	60	23	285	6
6 1/4	27	32	26	85	25	25	24	255	23	135	6 1/4
6 1/2	26	209	25	271	24	224	24	98	22	351	6 1/2
6 3/4	26	35	25	106	24	71	23	308	22	214	6 3/4
7	25	230	24	309	23	284	23	164	22	83	7
7 1/2	24	279	24	13	23	8	22	255	21	196	7 1/2
8	23	354	23	101	22	115	22	7	20	329	8
8 1/2	23	92	22	219	21	240	21	138	20	118	8 1/2
9	22	209	21	339	21	24	20	285	19	281	9
10	21	134	20	284	19	352	19	262	18	288	10

TAXA DO JURO %	Taxa da amortização										TAXA DO JURO %
	2 1/4 %		2 1/2 %		2 3/4 %		3 %		4 %		
	0.0225		0.025		0.0275		0.03		0.04		
	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	
2	32	42	29	246	27	216	25	287	20	173	2
2 1/8	31	225	29	92	27	82	25	168	20	256	2 1/8
2 1/4	31	55	28	305	26	313	25	54	20	21	2 1/4
2 3/8	30	252	28	163	26	188	24	304	19	313	2 3/8
2 1/2	30	94	28	26	26	67	24	197	19	242	2 1/2
2 5/8	29	303	27	253	25	310	24	94	19	172	2 5/8
2 3/4	29	157	27	126	25	198	23	353	19	105	2 3/4
2 7/8	29	16	27	2	25	89	23	257	19	39	2 7/8
3	28	240	26	243	24	343	23	162	18	340	3
3 1/8	28	108	26	127	24	241	23	71	18	278	3 1/8
3 1/4	27	341	26	15	24	141	22	342	18	217	3 1/4
3 3/8	27	218	25	267	24	45	22	255	18	157	3 3/8
3 1/2	27	99	25	161	23	311	22	171	18	100	3 1/2
3 5/8	26	344	25	59	23	221	22	90	18	43	3 5/8
3 3/4	26	231	24	320	23	132	22	10	17	358	3 3/4
3 7/8	26	123	24	224	23	46	21	293	17	304	3 7/8
4	26	18	24	130	22	322	21	217	17	242	4
4 1/8	25	275	24	40	22	241	21	144	17	194	4 1/8
4 1/4	25	176	23	311	22	161	21	72	17	144	4 1/4
4 3/8	25	79	23	225	22	84	21	2	17	94	4 3/8
4 1/2	24	345	23	141	22	8	20	294	17	45	4 1/2
4 5/8	24	254	23	59	21	295	20	228	16	363	4 5/8
4 3/4	24	165	22	340	21	223	20	163	16	317	4 3/4
4 7/8	24	78	22	262	21	153	20	99	16	271	4 7/8
5	23	353	22	186	21	85	20	37	16	223	5
5 1/8	23	271	22	112	21	18	19	337	16	183	5 1/8
5 1/4	23	191	22	40	20	313	19	277	16	140	5 1/4
5 3/8	23	112	21	330	20	249	19	219	16	98	5 3/8
5 1/2	23	36	21	261	20	187	19	163	16	57	5 1/2
5 5/8	22	321	21	194	20	127	19	107	16	16	5 5/8
5 3/4	22	248	21	128	20	67	19	53	15	342	5 3/4
5 7/8	22	177	21	64	20	9	19	0	15	303	5 7/8
6	22	107	21	1	19	311	18	307	15	265	6
6 1/4	21	333	20	239	19	200	18	206	15	190	6 1/4
6 1/2	21	204	20	123	19	94	18	109	15	119	6 1/2
6 3/4	21	80	20	11	18	352	18	16	15	49	6 3/4
7	20	322	19	264	18	254	17	288	14	348	7
7 1/2	20	99	19	61	18	69	17	116	14	217	7 1/2
8	19	253	18	233	17	257	16	318	14	100	8
8 1/2	19	62	18	58	17	97	16	170	13	348	8 1/2
9	18	243	17	255	16	307	16	31	13	247	9
10	17	281	16	319	16	34	15	139	13	52	10

TABOA — X

Esta Taboa mostra quantos annos são necessarios para multiplicar um capital o numero de vezes indicado á margem, e á taxa de juro inscripta no alto da columna. A sua expressão (veja-se Secç. I, § 4°) é :

$$\frac{\log k}{\log r}.$$

Multiplo do capital	Taxa do juro %							Multiplo do capital
	1	2	2 1/2	2 3/4	3	3 1/4	3 1/2	
	annos	annos	annos	annos	annos	annos	annos	
2	69,66	35,00	28,07	25,55	23,45	21,67	20,15	2
3	110,40	55,48	44,49	40,50	37,17	34,35	31,94	3
4	139,30	70,01	56,14	51,10	46,90	43,34	40,30	4
5	161,70	81,27	65,18	59,33	54,45	50,32	46,78	5
6	180,10	90,48	72,56	66,05	60,62	56,02	52,08	6
7	195,60	98,27	78,81	71,73	65,83	60,84	56,56	7
8	209,00	105,00	84,21	76,65	70,35	65,02	60,45	8
9	220,80	111,00	88,98	80,99	74,33	68,70	63,87	9
10	231,40	116,30	93,25	84,88	77,90	71,99	66,93	10

Multiplo do capital	Taxa do juro %							Multiplo do capital
	4	4 1/2	5	5 1/2	6	6 1/2	7	
	annos	annos	annos	annos	annos	annos	annos	
2	17,67	15,75	14,21	12,95	11,90	11,01	10,24	2
3	28,01	24,96	22,52	20,52	18,85	17,45	16,24	3
4	35,35	31,49	28,41	25,89	23,79	22,01	20,49	4
5	41,04	36,56	32,99	30,06	27,62	25,56	23,79	5
6	45,68	40,71	36,72	33,47	30,75	28,45	26,48	6
7	49,61	44,21	39,88	36,34	33,40	30,90	28,76	7
8	53,02	47,24	42,62	38,84	35,69	33,02	30,74	8
9	56,02	49,92	45,03	41,04	37,71	34,89	32,48	9
10	58,71	52,31	47,19	43,01	39,52	36,56	34,03	10

Multiplo do capital	Taxa do juro %							Multiplo do capital
	7 1/2	8	8 1/2	9	10	11	12	
	annos	annos	annos	annos	annos	annos	annos	
2	9,58	9,01	8,50	8,04	7,27	6,64	6,12	2
3	15,19	14,27	13,47	12,75	11,53	10,53	9,69	3
4	19,17	18,01	16,99	16,09	14,55	13,28	12,23	4
5	22,25	20,91	19,73	18,68	16,89	15,42	14,20	5
6	24,78	23,28	21,96	20,79	18,80	17,17	15,81	6
7	26,91	25,28	23,85	22,58	20,42	18,65	17,17	7
8	28,75	27,02	25,49	24,13	21,82	19,93	18,35	8
9	30,38	28,55	26,93	25,50	23,05	21,05	19,39	9
10	31,84	29,92	28,22	26,72	24,16	22,06	20,32	10

APPENDICE

CREDITO VITALICIO

La vie paie; la mort libère.
ALBERT DE MONTRY.

Tendo tratado na 3.ª Secção da amortização gradual da divida por meio de certo numero de annuidades, vem a proposito trazer á consideração dos leitores o seguinte estudo que publiquei no *Jornal do Commercio* do Rio de Janeiro em 1876 sobre a vantagem do reembolso do capital mutuado por meio de annuidades vitalicias, em lugar de um numero determinado de annuidades. Estas gravão o immovel hypothecado por todo o tempo da amortização, embora passe a herdeiros por morte do mutuario. Aquellas gravão o immovel somente durante a vida do mutuario, ficando por morte deste, o immovel livre e desembaraçado para os herdeiros. Sob o regimen do credito vitalicio, a divida é limitada á geração que a contrahe, e não é transmittida á geração que succede.

Executei este trabalho para dedical-o a um cavalheiro que, se se lhe não podia dizer como *Horacio* a *Mecenas*,

Quod si me lyricis vatibus inseres,
Sublimi feriam sidera vertice,

tinha-se comtudo distinguido por actos de philantropia, fosse qual fosse o movel: offereci-lhe portanto o manuscripto; porém correspondeu a esta fineza com desdenhoso mutismo. Aconteceu-me outra vez o que já me tinha acontecido com os corypheus do *Montepio Geral*: deitei perolas a quem as não sabia apreciar. Não importa; mesmo sem paranympho, o *Jornal do Commercio* graciosamente admittiu o trabalho em suas columnas; isto consolou-me, por ser uma prova de que elle tinha algum merecimento.

Quanto á theoria do calculo, reservo-me para um tratado (se me fôr dado concluil-o), em vasto plano, *sobre rendas vitalicias e seguros sobre a vida*, que emprehendi, por se achar esgotada a edição de 1850 do meu *Ensaio sobre os seguros sobre a vida*.

O CREDITO REAL E O CREDITO VITALICIO

INSTITUIÇÃO DE UM BANCO DE CREDITO REAL E VITALICIO

Estudo publicado no « Jornal do Commercio » do Rio de Janeiro em 30 de Julho de 1876

As instituições de credito real, que tiverão origem na Silesia em 1770, se não podem improvisar capitaes (diz Josseau, em seu relatorio de 2 de Janeiro de 1851 ao ministro da agricultura, em França), têm ao menos a virtude de fazer circular, e melhor repartir aquelles que existem.

Melhor que o credito individual, o credito collectivo póde, senão impedir crises, ao menos attenuar as suas consequencias desastrosas.

As instituições de credito real facilitão o desempenho da propriedade, e o fornecimento ao solo dos instrumentos de melhoramento.

Ellas augmentão o valor dos bens ruraes.

Para com o mutuario, facultão-lhe o achar capitaes sem a intervenção custosa de terceiros.

Evitão-lhe a exigencia imprevista de reembolso.

Facilitão-lhe o desempenhar-se por meio de annuidades modicas.

A obrigação do pagamento das annuidades fal-o contrahir habitos de economia e de ordem.

As letras hypothecarias, que se emittem até á concurrencia do valor dos emprestimos sobre hypotheca, soffrem menos a influencia dos successos politicos do que os outros titulos. Em épocas em que os titulos de divida publica têm tido cotação muito baixa, as letras hypothecarias têm conservado quasi o par.

Além da garantia dos immoveis hypothecados, é responsavel por ellas o capital das sociedades e seu fundo de reserva.

Ellas proporcionão ao capitalista um emprego seguro de capitaes com a cobrança regular dos juros.

Dispensão-lhe a vigilancia sobre os immoveis.

Poupão-lhe processos complicados e despezas, como corretagens, etc

As letras hypothecarias, pela sua reconhecida vantagem, têm sido favorecidas pelos governos, seja com isenção de sellos e emolumentos, seja autorizando as corporações, as caixas economicas, municipaes e de depositos a empregarem os seus fundos em letras hypothecarias.

As considerações de todas estas vantagens são baseadas sobre factos que Josseau amplamente investigou.

Um aperfeiçoamento trazido á primitiva instituição do credito territorial foi o reembolso do capital mutuado por meio de annuidades, que amortizão o capital e juros n'um prazo ajustado.

A annuidade será tanto mais pequena quanto maior fôr o prazo. Mas o que é certo é que, n'um prazo regular, a annuidade, que comprehende juro e amortização, será menor que o juro, que sem taes instituições, o mutuario teria de pagar sem amortização, e por consequencia subsistindo sempre a divida por inteiro. E isto deve ser assim; porque a agricultura, não podendo restituir de prompto o capital, e havendo para mutual-o, as difficuldades de hypothecas, de avaliações, de vigilancia, etc., a não ser a intervenção destas instituições, que pelo seu mecanismo engenhoso tomão a si todas essas delongas e obstaculos, o capitalista, directamente, ou não empresta, ou empresta com condições muito onerosas.

Mas a intervenção das instituições de credito territorial põe a agricultura no mesmo pé da industria. Ellas proporcionão ao mutuario o capital de que precisa, a longo prazo e juro moderado, e ao capitalista o emprego do seu capital em titulos com as mais fortes garantias, sem outro embaraço mais do que a simples tradição, e que *devem ser transmissiveis como os melhores titulos.*

A hypotheca, porém, gravando o immovel por toda a duração do prazo da amortização, expõe a uma expropriação ruinosa para a successão, se o mutuario morre antes de ter amortizado a divida.

A consideração das funestas consequencias deste successo, a que aliás nenhum mutuario deixa de estar sujeito, inspirou a alguns espiritos illustrados a idéa de effectuar a amortização por annuidades vitalicias em lugar de annuidades determinadas.

Deste modo o mutuario paga uma annuidade vitalicia, durante a vida, ou por um prazo determinado (salvo o direito de remir-se quando lhe aprouver), mas em todo caso, *por sua morte, os bens passão livres e desembaraçados para a successão.*

E' um breve estudo sobre este assumpto, que julgo importante, que me propuz offerecer, e para o qual peço attenção benevola.

1.º — *Credito vitalicio.*

Sob o regimen do credito vitalicio, as gerações presentes solvem as suas dividas, e não as legão ás gerações futuras.

A vida paga, a morte desfaz todos os compromissos.

O compromisso morre com o mutuario; não passa a seus herdeiros.

Nos emprestimos que têm de ser amortizados

por annuidades em tempo fixo, o mutuario está muito arriscado a deixar aos herdeiros os bens sobrecarregados com a maior parte da divida ; porque a amortização em longos prazos faz-se muito lentamente.

De 1:000$ mutuado para ser reembolsado em 30 annos, com o juro de 8 %, acha-se ainda por amortizar, isto é, devido (*):

No fim de	5 annos.....	948$213
» » »	10 »	872$121
» » »	15 »	760$316
» » »	20 »	596$030
» » »	25 »	354$662

Eis-aqui que no fim de 10 annos achão-se ainda em divida mais de 87 % do capital mutuado. Isto quer dizer que, se morre o mutuario, ha mil probabilidades da necessidade da expropriação e venda dos bens para pagamento da divida ; e por consequencia completa ruina.

Se o mutuario tivesse contrahido o emprestimo para reembolsal-o mediante uma annuidade vitalicia, em qualquer época em que o sorprendesse a morte, os seus herdeiros receberião os bens livres e desembaraçados da hypotheca ou qualquer onus, com todos os melhoramentos que tivesse proporcionado o emprestimo, em estado vantajoso de exploração ; e podendo servir para novo emprestimo, se assim fosse necessario.

Passo agora ao modo pratico de realizar a amortização por annuidades vitalicias, o que melhor mostrará as vantagens da sua applicação.

O prazo da amortização por annuidades vitalicias póde ser por toda a vida do mutuario ou em periodos de 10 a 30 annos.

O prazo tambem póde ser menor.

Quer a annuidade seja a pagar por toda a vida, quer seja até completar certo prazo, sempre o fallecimento do mutuario desfaz a hypotheca, e desobriga de quaesquer annuidades ulteriores. E' evidente que :

O mutuario que viver menos de sua vida média dá prejuizo ao banco.

O que attingir a média traz equilibrio.

O que exceder a média dá lucro.

E', pois, necessario determinar as annuidades de modo que o prejuizo com uns seja compensado pelo lucro com outros, e o banco auffira o seu lucro legitimo dentro de limites de antemão traçados.

A estatistica fornece os meios de determinar taes annuidades, porque mostra entre mil nascidos, por exemplo, quantos vão attingindo cada anno seguinte, até extinguir-se o grupo.

2.º — *Sobrevivencia.*

Carecemos, infelizmente, de uma taboa de mortalidade construida sobre os registros mortuarios locaes. Não se tem prestado attenção a esta necessidade dos tempos que correm, em que uma infinidade de relações sociaes dependem dessa parte da estatistica.

Não devem desconhecer-se as difficuldades da construcção de uma taboa, que dê com sufficiente exactidão o decrescimento da sobrevivencia de anno em anno. Mas o que cumpre fazer, á vista das difficuldades, quasi insuperaveis, para a obter de prompto? Deveremos cruzar os braços e nada emprehender por emquanto naquillo que depende de calculo sobre a duração da vida humana ?

De nenhum modo.

Ainda quando tivessemos a melhor taboa de sobrevivencia, em relação á nossa população *em geral*, ella não seria adequada ás emprezas de que trato. Ella só poderia servir de guia e de *criterium* para mais acertada escolha. E' sobre os registros destas empresas, dos monte-pios, das associações de rendeiros vitalicios e de seguros sobre a vida, etc., que se póde construir uma taboa especial, adequada as suas operações.

Vão elucidar esta questão os factos que têm occorrido em paizes onde desde muitas dezenas de annos se praticão e se estudão estes negocios. Observemos o que se tem passado depois que sabios benemeritos prestárão á sociedade o relevante serviço da construcção de taboas de mortalidade e sobrevivencia.

Na Inglaterra, a taboa construida por Price sobre observações em Northampton (1735 a 1781), serviu ás companhias inglezas para calcularem os seus premios de seguro em caso de morte.

Em França, as companhias têm calculado os seus premios em caso de morte sobre a taboa de Duvillard (1806).

Baily preconisa a taboa de Wargentim, por observações na Suecia (1757 a 1775), como tendo sido acuradamente construida sobre os dous elementos : registros mortuarios e recenseamento por idades ; além das correcções exigidas pelo movimento migratorio.

Eis aqui a comparação da vida média entre estas tres taboas :

Idade	*Price* *Northampton* 1735—1781	*Duvillard* *França* 1806	*Wargentim* *Suecia* 1757—1775
20	33,43	34,26	38,02
30	28,27	28,52	31,21
40	23,08	22,89	24,66
50	17,99	17,23	18,16
60	13,21	11,95	12,63

Deixo de mencionar os mais recentes trabalhos em França, de Montferrand, Legoyt e Heuschling, que aliás dão uma vida média mais longa; porque até aqui nenhuns premios ou rendas se têm calculado sobre elles.

O reconhecimento de que aquellas taboas tiradas dos registros publicos não erão adequadas a grupos de cabeças escolhidas, determinou desde logo, para as rendas vitalicias e outros contratos em caso de vida, a adopção, em Inglaterra, da taboa de Milne, por observações em Carlisle, 1815; e em França a adopção, para identicos casos, da taboa de Deparcieux, 1746, construida sobre registros de tontinas e ordens religiosas.

Eis aqui a vida média dada por estas duas taboas, assim como tambem a de Finlaison, construida em Inglaterra sobre os registros dos rendeiros vitalicios do Estado (cabeças escolhidas).

Idade	*Milne* *Carlisle* 1815	*Deparcieux* *França* 1746	*Finlaison* *Inglaterra*—1827
20	41,46	40,22	41,19
30	34,34	34,06	35,43
40	27,61	27,48	29,18
50	21,11	20,38	22,45
60	14,34	14,25	16,01

(*) Veja-se o § 5º da Secção III.

E' esta a vida média que se tem achado em grupos de cabeças escolhidas.

O immenso desenvolvimento dos negocios fundados sobre a duração da vida humana, tem feito convergir os esforços para se obter a maior rectidão possivel em preços e premios; porque sem justiça não ha nada estavel.

Vinte companhias inglezas reunirão os seus registros, e construirão uma taboa chamada da *nova experiencia*, pela qual se calculão hoje em Inglaterra os premios, a que chamão *liquidos*, porque com elles as companhias não terião lucro nem perda: e portanto addicionão-lhes uns tantos por cento para despezas da administração e seu lucro legitimo.

Badon-Pascal diz que esta taboa é um verdadeiro monumento de estatistica, que faz honra ao *Instituto dos actuaries* de Londres, donde ella dimana, e lamenta que as companhias francezas não estejão ainda em estado de construirem uma taboa semelhante.

As companhias francezas, porém, reconhecendo quão inadequada é a taboa construida sobre registros geraes para grupos de cabeças escolhidas, neutralizão os effeitos da taboa de Duvillard, desfavoraveis aos seus segurados, fazendo-os participantes nos lucros. Uso que ainda conservão na Inglaterra, mesmo com a nova taboa.

Didion verificou em 1850 nos registros da Sociedade de Previdencia de Metz, naquelle ultimo quinquennio, 93 obitos sobre 1,500 individuos de diversas idades, grupo que segundo a taboa de Deparcieux devia dar 98 obitos naquelle periodo; houve menor mortalidade do que a deduzida da taboa de Deparcieux; mas a differença é tão insignificante, que dá o mais alto testemunho da exactidão da taboa.

Não sei se a taboa de Sheppard Homans, usada por companhias dos Estados-Unidos da America, é construida sobre os registros publicos, ou grupos de cabeças escolhidas: parece, porém, ser sobre cabeças escolhidas, pela concordancia dos seus resultados com os das taboas de Deparcieux, Finlaison e Milne.

Eis aqui, segundo Sheppard Homans, na America do Norte:

Idade	*Vida média*
20.....	42,20
30.....	35,33
40.....	28,18
50.....	20,91
60.....	14,09

Deve-se notar que (salvo nos primeiros cinco annos da vida, o que tem sua razão de ser), as taboas construidas sobre grupos de cabeças escolhidas differem pouco de uns paizes para outros. O corollario que eu tiro de tudo o que precede é:

Que uma taboa construida sobre os registros geraes seria inadequada para um banco de credito vitalicio.

Que é necessario construir uma taboa fundada em observações locaes, mas tiradas dos registros de grupos de cabeças escolhidas.

Emquanto, porém, esta segunda condição não póde preencher-se, parece-me que a média entre as taboas de Deparcieux e Duvillard, que já tem sido proposta por Violeine e outros, daria para o nosso caso, com sufficiente cautela para a segurança do banco, o decrescimento da sobrevivencia, sem deixar de attender, tanto quanto actualmente é possivel, á rectidão dos preços.

Na seguinte taboa, média entre as de Deparcieux e Duvillard, se póde comparar a vida média resultante com a das taboas precedentes.

Eis-aqui para as idades consideradas precedentemente.

Idade	*Vida média*
20.....	37,93
30.....	31,98
40.....	25,82
50.....	19,31
60.....	13,53

Taboa de sobrevivencia, média entre as de Deparcieux e Duvillard, desde a idade de 20 annos

Idade	*Sobreviventes*	*Vida média*	*Idade*	*Sobreviventes*	*Vida média*
20	658	37.93	58	360	14.61
21	651	37.34	59	349	14.08
22	644	36.74	60	338	13.53
23	637	36.14	61	327	
24	630	35.53	62	316	
25	623	34.93	63	304	
26	615	34.38	64	293	
27	608	33.75	65	281	
28	601	33.15	66	268	
29	593	32.59	67	255	
30	586	31.98	68	242	
31	579	31.36	69	228	
32	571	30.79	70	214	
33	564	30.17	71	200	
34	556	29.59	72	185	
35	549	28.96	73	170	
36	542	28.33	74	156	
37	534	27.75	75	141	
38	527	27.11	76	128	
39	520	26.47	77	114	
40	513	25.82	78	101	
41	506	25.17	79	89	
42	499	24.52	80	76	
43	492	23.86	81	65	
44	485	23.20	82	54	
45	478	22.53	83	45	
46	471	21.86	84	37	
47	463	21.23	85	30	
48	455	20.59	86	24	
49	447	19.95	87	18	
50	439	19.31	88	14	
51	430	18.70	89	10	
52	421	18.16	90	7	
53	411	17.52	91	5	
54	401	16.94	92	3	
55	391	16.36	93	2	
56	381	15.78	94	1	
57	371	15.19			

3.º—*Taxa do juro.*

Sobre a taxa do juro ha a considerar a mesma cousa tanto para as annuidades vitalicias, como para as annuidades certas (por prazo determinado).

Seria muito para desejar um juro *barato;* mas a taxa do juro deve seguir as suas leis economicas. O que é certo é que o banco não póde emprestar a longo prazo, a juro mais baixo do que os capitalistas exigirião delle a prazos muitissimo mais limitados.

Para o calculo das tabellas adoptei, portanto, o juro de 8 %, por me parecer o mais baixo que nas actuaes circumstancias se poderia adoptar.

Um meio immediato de obter para os mutuarios juro mais modico, seria a aceitação franca da parte do nosso publico das letras hypothecarias, convencendo-se da sua perfeita segurança; o que me parece questão de tempo, se a rigorosa observancia dos principios captar a confiança do publico.

O lucro occasionado pela differença entre a taxa do juro do emprestimo e o das letras compensaria amplamente aos accionistas a deficiencia de lucro resultante da barateza do juro do emprestimo.

4.º—*Letras hypothecarias.*

A emissão de letras hypothecarias póde ter lugar com os emprestimos por annuidades vitalicias, do mesmo modo que com os emprestimos por annuidades certas.

A parte do emprestimo ainda não reembolsada determina-se com precisão.

E' o valor do resgate quando o mutuario queira remir-se. E' o correspondente valor do activo do banco. E' tambem o valor que deve regular a emissão das letras hypothecarias.

Estes valores achão-se determinados na seguinte

Tabella n. 2

Valor do resgate de um emprestimo vitalicio de 1:000$000 a juro de 8 %.

Idade do mutuario na occasião do emprestimo	RESGATE	
	Passados 5 annos	*Passados 10 annos*
45	931$725	859$139
50	922$095	829$406
55	899$480 $\frac{20,615}{100,000}$ (*)	774$924 $\frac{6,369}{10,000}$ (*)

Estes valores são, nestas differentes épocas, os equivalentes ás annuidades futuras devidas ao banco; se se effectuasse o seu pagamento, as respectivas annuidades ficarião remidas, e a divida extincta; representão portanto o activo do banco, sobre que se podem emittir letras hypothecarias.

Adiante mostrarei a sua exactidão.

(*) Tomo estas decimaes (o que na pratica seria pueril), para obter na demonstração seguinte a maxima correcção.

5.º—*Tabellas de annuidades.*

Sobre a taboa média de sobrevivencia, entre as de Deparcieux e Duvillard, e o juro de 8 %, calculei a tabella n. 1, que mostra a annuidade a pagar para amortização de um emprestimo, segundo a idade do mutuario.

Calculei tambem a tabella n. 3, que mostra a annuidade para amortização em prazo fixo, tambem com juro de 8 %. (*)

Tanto em uma como em outra tabella, deve addicionar-se ás annuidades uma porcentagem para despezas de administração.

A comparação destas tabellas põe bem patente a vantagem da annuidade vitalicia sobre a annuidade certa, isto é, por um prazo determinado.

Aos 40 annos a vida média é 25 $^4/_5$, como se viu na taboa de sobrevivencia. Ha portanto, para o mutuario de 40 annos a eventualidade de pagar 25 annuidades.

A annuidade certa para amortização em 25 annos de 1:000$, é (tabella n. 3)..... 93$679

A annuidade vitalicia para uma pessoa de 40 annos, é (tabella n. 1). 103$903

Differença, um por cento.

A annuidade certa para amortização da mesma quantia em 5 annos, é (tabella n. 3)..... 250$456

A annuidade vitalicia por 5 annos para uma pessoa de 20 annos, é (tabella n. 1)..... 258$278

Differença, menos de 8 decimos por cento.

Quem não preferirá por tão pequenas differenças, as vantagens do credito vitalicio?

E estas differenças para mais dão-se por emquanto, porque, de futuro, é de esperar que as differenças se convertão em favor do mutuario a credito vitalicio.

Ha toda a probabilidade pelas considerações expostas a respeito das taboas de sobrevivencia, que a observação local da mortalidade em sociedades analogas, monte-pios, etc., dê logar á formação de uma taboa (a exemplo da Inglaterra) em que o decrescimento da sobrevivencia seja menos rapido do que o da taboa adoptada; o que dará em resultado annuidades mais modicas.

Tabella n. 1

Annuidades vitalicias a pagar para amortização do emprestimo de 1:000$, segundo a idade do mutuario, incluindo o juro de 8 % e a quota para amortização.

No caso de morte do mutuario, os bens hypothecados ficão livres e desembaraçados para a sua successão.

Idade do mutuario	*Annuidades a pagar emquanto vivo*
20	94$652
25	96$273
30	98$023
35	100$373
40	103$903
45	109$587
50	117$618
55	127$551 $\frac{8,114}{10,000}$ (**)
60	141$809

(*) Veja-se o § 2.º da Secção III.

(**) Veja-se a nota á Tabella n 2, que precede.

Annuidades a pagar temporariamente:

Idade do mutuario	*Por 5 annos*	*Por 10 annos*	*Por 15 annos*
20	258$278	157$313	125$871
25	259$314	158$215	126$762
30	259$788	158$752	127$903
35	260$267	159$165	127$883
40	260$577	159$890	129$183
45	262$409	162$476	132$394
50	266$673	167$018	137$431
55	270$927	171$897	143$492

Observação

Deverá addicionar-se uma porcentagem para as despesas.

Tabella n. 3

Annuidades a pagar para amortização em prazo fixo do emprestimo de 1:000$, incluindo o juro de 8 % e a quota para amortização (*).

Estas annuidades onerão os bens que ficão hypothecados até o fim do prazo, ainda que por morte do mutuario passem a herdeiros.

Prazo	*Annuidade*
5 annos.....	250$456
10 »	149$029
15 »	116$830
20 »	101$852
25 »	93$679
30 »	88$827

Observação.

Deverá addicionar-se uma porcentagem para as despesas.

6.º—*Exactidão das Tabellas.*

Toda a annuidade comprehende o juro do capital e a quota para amortização.

Vou mostrar que com as annuidades da tabella n. 1, os accionistas, *independentemente de emissão de letras hypothecarias*, têm, *pelo menos*, oito por cento do seu capital, e uma quota que reembolsará integralmente o mesmo capital.

Eu disse *pelo menos oito por cento*, porque o interesse dos accionistas deve ser maior. Ha duas razões principaes:

1.ª A annuidade é calculada para o fim do anno, mas recebe-se, como é costume, metade em cada semestre, o que adianta sempre seis mezes a cobrança de metade de cada annuidade.

2.ª O decrescimento da sobrevivencia entre os mutuarios (cabeças escolhidas) deve ser menor do que o da taboa adoptada.

Ha ainda as outras operações de emprestimos a pequeno prazo, depositos, etc.

As despezas de administração são reembolsadas por uma quota que se deve addicionar á annuidade. Não ha, pois, despesas a levar em conta na verificação que se segue.

(*) Veja-se a Tab. VII, pagina 283.

7.º—*Verificação.*

Tomemos os mesmos grupos de sobreviventes da taboa adoptada, e supponhamos que a 391 mutuarios de 55 annos de idade, o banco empresta 10:000$ a cada um, ao juro de 8 %, e amortização vitalicia.

Teremos:

Capital emprestado pelo banco.....	3,910:000$000
Annuidade vitalicia a receber de cada mutuario, actualmente de 55 annos, segundo a tabella n. 1.....	1:275$548,114
Dividendo de 8 % do capital emprestado a distribuir aos accionistas.	312:800$000

A marcha das operações de anno em anno vai mostrar que recebendo-se annualmente as annuidades dos mutuarios sobreviventes, segundo a taboa, e pagando-se aos accionistas o seu dividendo, acha-se no fim do periodo reproduzido o capital emprestado de 3,910:000$000.

MARCHA ANNUAL DAS OPERAÇÕES

ANNO	NUMERO DE MUTUARIOS QUE PAGÃO ANNUIDADE	DIVIDENDO	JURO	QUANTIAS
1.º	381	.....	.....	485:983$831
		1.º	.....	312:800$000
				173:183$831
			8 %	13:854$707
	371	.....	.....	473:228$350
2.º				660:266$888
		2.º	.....	312:800$000
				347:466$888
			8 %	27:797$351
	360	.....	.....	459:197$321
3.º				834:461$560
		3.º	.....	312:800$000
				521:661$560
			8 %	41:732$925
	349	.....	.....	445:166$292
4.º				1,008:560$777
		4.º	.....	312:800$000
				695:760$777
			8 %	55:660$862
	338	.....	.....	431:135$263
5.º				1,182:556$902
		5.º	.....	312:800$000
				869:756$902

ANNO	NUMERO DE MUTUARIOS QUE PAGÃO ANNUIDADE	DIVIDENDO	JURO	QUANTIAS
			8 %	69:580$552
	327	.....	.....	417:104$233
				1,356:441$687
6.°		6.°	.....	312:800$000
				1,043:641$687
			8 %	83:491$335
	316	.....	.....	403:073$204
				1,530:206$226
7.°		7.°	.....	312:800$000
				1,217:406$226
			8 %	97:392$498
	304	.....	.....	387:766$627
				1,702:565$351
8.°		8.°	.....	312:800$000
				1,389:765$351
			8 %	111:181$228
	293	.....	.....	373:735$577
				1,874:682$176
9.°		9.°	.....	312:800$000
				1,561:882$176
			8 %	124:950$574
	281	.....	.....	358:429$020
				2,045:261$770
10.°		10.°	.....	312:800$000
				1,732:461$770
			8 %	138:596$942
	268	.....	.....	341:846$835
				2,212:905$607
11.°		11.°	.....	312:800$000
				1,900:105$607
			8 %	152:008$448
	255	.....	.....	325:264$769
				2,377:378$824
12.°		12.°	.....	312:800$000
				2 064:578$824
			8 %	165:166$306
	242	.....	.....	308:682$644
				2,538:427$774
13.°		13.°	.....	312:800$000
				2,225:627$774
			8 %	178:050$222
	228	.....	.....	290:824$970
				2,694:502$966
14.°		14.°	.....	312:800$000
				2,381:702$966

ANNO	NUMERO DE MUTUARIOS QUE PAGÃO ANNUIDADE	DIVIDENDO	JURO	QUANTIAS
			8 %	190:536$237
	214	.....	.....	272:967$296
				2,845:206$499
15.°		15.°	.....	312:800$000
				2,532:406$499
			8 %	202:592$520
	200	.....	.....	255:109$623
				2,990:108$642
16.°		16.°	.....	312:800$000
				2,677:308$642
			8 %	214:184$691
	185	.....	.....	235:976$401
				3,127:469$734
17.°		17.°	.....	312:800$000
				2,814:669$734
			8 %	225:173$579
	170	.....	.....	216:843$179
				3,256:686$492
18.°		18.°	.....	312:800$000
				2,943:886$492
			8 %	235:510$920
	156	.....	.....	198:985$506
				3,378:382$918
19.°		19.°	.....	312:800$000
				3,065:582$918
			8 %	245:246$633
	141	.....	.....	179:852$284
				3,490:681$835
20.°		20.°	.....	312:800$000
				3,177:881$835
			8 %	254:230$547
	128	.....	.....	163:270$159
				3,595:382$541
21.°		21.°	.....	312:800$000
				3,282:582$541
			8 %	262:606$603
	114	.....	.....	145:412$485
				3,690:601$629
22.°		22.°	.....	312:800$000
				3,377:801$629
			8 %	270:224$130
	101	.....	.....	128:830$360
				3,776:856$119
23.°		23.°	.....	312:800$000
				3,464:056$119

ANNO	NUMERO DE MUTUARIOS QUE PAGÃO ANNUIDADE	DIVIDENDO	JURO	QUANTIAS
			8 %	277:124$489
	89	.....	.....	113:523$782
24.°				3,854:704$390
		24.°	.....	312:800$000
				3,541:904$390
			8 %	283:352$351
	76	.....	.....	96:941$657
25.°				3,922:198$398
		25.°	.....	312:800$000
				3,609:398$398
			8 %	288:751$872
	65	.....	.....	82:910$627
26.°				3,981:060$897
		26.°	.....	312:800$000
				3,668:260$897
			8 %	293:460$872
	54	.....	.....	68:879$598
27.°				4,030:601$367
		27.°	.....	312:800$000
				3,717:801$367
			8 %	297:424$110
	45	.....	.....	57:399$665
28.°				4,072:625$142
		28.°.	.....	312:800$000
				3,759:825$142
			8 %	300:786$011
	37	.....	.....	47:195$280
29.°				4,107:806$433
		29.°	.....	312:800$000
				3,795:006$433
			8 %	303:600$515
	30	.....	.....	38:266$443
30.°				4,136:873$391
		30.°	.....	312:800$000
				3,824:073$391
			8 %	305:925$872
	24	.....	.....	30:613$155
31.°				4,160:612$418
		31.°	.....	312:800$000
				3,847:812$418
			8 %	307:824$993
	18	.....	.....	22:959$866
32.°				4,178:597$277
		32.°	.....	312:800$000
				3,865:797$277

ANNO	NUMERO DE MUTUARIOS QUE PAGÃO ANNUIDADE	DIVIDENDO	JURO	QUANTIAS
			8 %	309:263$782
	11	.....	.....	17:857$671
33.°				4,192:918$733
		33.°	.....	312:800$000
				3,880:118$733
			8 %	310:409$498
	10	.....	.....	12:755$481
34.°				4,203:283$712
		34.°	.....	312:800$000
				3,890:483$712
			8 %	311:238$697
	7	.....	.....	8.928$837
35.°				4,210:651$246
		35.°	.....	312:800$000
				3,897:851$246
			8 %	311:828$100
	5	.....	.....	6:377$741
36.°				4,216:057$087
		36.°	.....	312:800$000
				3,903:257$087
			8 %	312:260$567
	3	.....	.....	3:826$644
37.°				4,219:344$298
		37.°	.....	312:800$000
				3,906:544$298
			8 %	312:523$543
	2	.....	.....	2:551$096
38.°				4,221:618$937
		38.°	.....	312:800$000
				3,908:818$937
			8 %	312:705$515
	1	.....	.....	1:275$548
39.°				4,222:800$000
		39.°	.....	312:800$000
				3,910:000$000

Está, pois, verificado que com a cobrança da ultima annuidade do ultimo sobrevivente do grupo, e o pagamento aos accionistas do ultimo dividendo do periodo, acha-se reproduzido o capital primitivamente emprestado.

E' o que era preciso demonstrar.

8.° — *Resgate.*

Supponhamos ainda o mesmo emprestimo aos 301 mutuarios de 55 annos, e que os sobrevi-

ventes, passados 5 annos, querem remir-se.

Passados 5 annos, os sobreviventes têm 60 annos, e são em numero de 338, como se vê na taboa de sobrevivencia adoptada.

Estes sobreviventes devem pagar uma quantia tal que, sommada com o capital já reembolsado no fim de 5 annos, perfaça o capital de 3.910:000$ primitivamente emprestado.

E' o que se verifica.

O valor do resgate de um emprestimo de 10:000$ para a idade de 55 annos, passados 5 annos, *é*, segundo a tabella n. 2 já apresentada, 8:994$802,0615.

Portanto:

338 mutuarios sobreviventes pagão pelo resgate.....	3.040:243$098
Ora, no fim de 5 annos, como se vê na *marcha annual das operações*, além dos dividendos que se têm distribuido aos accionistas, achão-se amortizados.....	869:756$902
Somma.....	3,910:000$000

Supponhamos ainda o mesmo emprestimo a 391 mutuarios de 55 annos cada um, e que é ao fim de 10 annos que os que sobrevivem querem remir-se.

No fim de 10 annos existem 281, como se vê na taboa ao lado da idade 65.

O valor do resgate, como se vê na tabella n. 2, é 7:749$246,369 para cada mutuario:

Logo, 281 mutuarios pagão pelo resgate.....	2,177:538$230
No calculo da marcha annual das operações vê-se que no fim de 10 annos achão-se amortizados.....	1,732:461$770
Somma...	3,910:000$000

Em qualquer época em que tenha lugar o resgate, acha-se reproduzido o capital para novas operações.

Demonstraria-se do mesmo modo o valor, tanto das annuidades como do resgate, para outra qualquer idade.

João de Sousa Moreira.

Rio de Janeiro, 18 de Março de 1876.

INDICE

		Pags.
	Dedicatoria	V
	Prologo	VII
	Noticia historico-philosophica sobre a Usura e o Anatocismo	XI
	Alphabeto grego	XXV

SECÇÃO PRIMEIRA

	Do capital e do juro	1
§ I	—Valor adquirido pelo capital com o seu juro	2
	Nota sobre o juro composto por mais de 100 annos	4
§ II	—Capital descontado	6
	Nota sobre o complemento arithmetico	7
§ III	—Importe do juro. Importe do desconto	8
§ IV	—Determinação do prazo. Prazo necessario para obter, com o juro dado, certo multiplo do capital	9
§ V	—Taxa do juro	10
§ VI	—Fracção ou numero fraccionario de annos do prazo	11
	Primeiro caso—Do juro a pagar annualmente, que taxa corresponde a uma parte do anno	11
	Segundo caso—Do juro a pagar em partes do anno, que juro resulta ao anno	15
§ VII	—Vencimento commum para diversas quantias que se vencem em diversas épocas	17

SECÇÃO SEGUNDA

	Das annuidades, rendas ou pensões	20
§ I	—Somma de annuidades collocadas no principio do anno	20
§ II	—Somma das rendas ou annuidades cobraveis no fim do anno	22

§ III —Valor actual das annuidades..... 25
Nota sobre as annuidades adiantadas..... 28
§ IV —Annuidades ou rendas cobraveis por fracções..... 29
Primeiro caso — O juro annual é capitalizado pelas mesmas fracções..... 29
Segundo caso—O juro é capitalizado annualmente..... 33
Verificação reciproca das formulas..... 38
§ V —Annuidades por inteiro e juro capitalizado por fracções.... 38
§ VI —Annuidades pagas por fracções, e o juro capitalizado em outras fracções. Formulas geraes das annuidades..... 43
Nota sobre os elementos da annuidade..... 50
§ VII —Duração da renda ou annuidade..... 52
Annuidades por inteiro e juro capitalizado ao anno..... 52
Annuidades em fracções e os juros capitalizados em outras fracções. Formulas geraes..... 56
VIII—Taxa do juro..... 58
Annuidades por inteiro e juro capitalizado ao anno..... 59
Annuidades e juros em fracções. Formulas geraes..... 65
§ IX —Calculo do valor de cada prestação da annuidade..... 71
§ X --Duração commum para annuidades de durações differentes. 73
§ XI —Pensões ou rendas differidas e antecipadas..... 75
Renda differida—Renda e juro annuaes..... 75
Renda em fracções e juro composto nas mesmas épocas.... 77
Renda em fracções e juro composto ao anno..... 78
Renda annual e o juro composto por fracções..... 79
Renda em fracções e o juro capitalizado por outras fracções. Formulas geraes..... 80
Renda antecipada. Formulas geraes..... 83

SECÇÃO TERCEIRA

Amortização 86
§ I —Quota para amortização: seu crescimento, e decrescimento do juro pelo progresso da amortização..... 87
§ II —Relação da annuidade á quota e ao capital—Valor de x, isto é, a annuidade (comprehendendo amortização e juro), capaz de amortizar n'um tempo dado o capital 1..... 92
§ III —Numero de annos em que deve realizar-se a amortização... 93
§ IV —Numero fraccionario de annos..... 95
§ V —Em qualquer época do periodo da amortização, determinar o que está amortizado, e o que falta amortizar..... 98

§ VI —Determinar a época em que se achará amortizada uma certa parte do capital mutuado..... 102
§ VII —Emissão de obrigações resgataveis por sorteio. Quadro dos juros e amortização..... 103
1.° A taxa do juro sendo a mesma para o capital e para a quota, o resgate das obrigações não altera a annuidade, inda que o juro seja pago por partes..... 103
2.° Mas altera-a, sendo a taxa differente..... 104
§ VIII—Ultimos pagamentos por fracção do anno, do juro do capital não resgatado, e do saldo a resgatar..... 105
§ IX —Quantas obrigações se podem resgatar annualmente..... 108
§ X —Probabilidade de serem sorteadas as obrigações de um emprestimo..... 110
§ XI —Levantamento de emprestimo negociado com um desconto qualquer..... 112
Quadro do presente valor..... 114
Formula geral..... 116
Outros exemplos: sendo o prazo da amortização numero inteiro dos annos..... 121
§ XII —Premio de sorteio—Levantamento de emprestimo—Numero e preço de emissão das obrigações..... 123
Emissão com desconto..... 124
Emissão com premio..... 125
§ XIII -Juro que resulta á Empresa da emissão de obrigações com desconto ou com premio..... 126
§ XIV—Juro que resulta da compra de uma obrigação com desconto ou com premio. Época do reembolso, ou preço da compra, para obter certo juro..... 129
Compra com desconto..... 131
Compra com premio..... 132
Época precisa do reembolso para obter certo juro..... 133
Preço da compra para obter certo juro, supposta a época do reembolso..... 134
§ XV —Emprestimos com amortização a particulares..... 135
§ XVI—Pagamento antecipado (resgate). Augmento do capital primitivamente emprestado..... 137
Resgate parcial: consequente reducção da annuidade..... 138
Reducção da annuidade, sendo os prazos numeros fraccionarios..... 140
Augmento do capital primitivamente emprestado..... 143
Nota sobre o pagamento semestral das annuidades..... 144

SECÇÃO QUARTA

Das annuidades crescentes e decrescentes..... 149
I —Somma de annuidades collocadas no principio do anno.... 149
§ II —Somma de rendas cobraveis no fim do anno..... 151
§ III —Valor actual das annuidades..... 151
§ IV —Formulas relativas á annuidade 1..... 152
§ V —Annuidades em fracções e juros capitalizados em outras fracções. Formulas geraes..... 157

NOTAS

A —Descontos a juros simples..... 166
Taboa de divisores fixos considerando o anno de 360 dias.... 168
Taboa de divisores fixos considerando o anno de 365 dias.... 169
B —Vencimento commum em juros simples..... 170
C —E' preciso evitar as illusões..... 172
Avaliação do trigo pedido pelo inventor do jogo do xadrez.... 172
Pezo de ar athmospherico que um homem supporta..... 173
Tempo necessario para 12 pessoas fazerem entre si todas as permutações de logar..... 174
Relação de uma gotta de medicamento á porção de agua em que se acha diluida na 30ª dynamização homœopathica.... 175
D —Pagamento em quantias iguaes a diversos prazos com juros simples..... 176
E —Probabilidades—Combinações e permutações..... 177
Formula de Stirling..... 181

TABOAS

I —Valor que adquire o capital 1 com o seu juro..... 185
1.º Supplemento á Taboa I. Capital com os seus juros em prazos de 101 a 200 annos..... 215
2.º Supplemento á Taboa I. Capital com o juro correspondente a um numero de mezes..... 219
II —Valor do capital 1 descontado..... 223
Supplemento á Taboa II —Capital descontado por um numero de mezes..... 231
III —Somma com os juros de annuidades adiantadas..... 233
IV —Somma com os juros de annuidades collocadas no fim de cada anno..... 238

V —Presente valor das annuidades descontadas..... 247
VI —Annuidade que póde produzir o capital 1 com seus juros: ou annuidade capaz de amortizar a divida do capital 1 com os juros..... 255
VII —Logarithmos de 1 com o seu juro de um anno—Logarithmos do juro de um anno..... 288
VIII —Logarithmos dos logarithmos de 1 com o seu juro de um anno..... 295
IX —Tempo necessario para a amortização de uma divida..... 297
X —Annos precisos para ter um multiplo do capital..... 303

APPENDICE

1.º Credito vitalicio..... 307
2.º Sobrevivencia..... 308
3.º Taxa do juro. 310
4.º Letras hypothecarias..... ... 310
5.º Tabellas de annuidades..... 310
6.º Exactidão das Tabellas..... 311
7.º Verificação 311
8.º Resgate..... 313

ERRATA

Pagina	Linha	Indicação	Deve lêr-se
11	4.ª	*A equação isolada*.....	$t=\sqrt[n]{\frac{V}{M}}-1$
12	Penultima	*A equação no seguimento da linha*.....	$\sqrt[n-1]{\frac{Mr}{M}}=r^{\frac{1}{n-1}}$
25	1.ª	*Em lugar de* S_N.....	S_N
»	9.ª	*Em lugar de* S_n.....	S_n
28	Penultima	*A equação isolada*.....	$rP_n=1+P_{n-1}$;
34	15.ª	*Em lugar de* Fazendo a equação.....	Fazendo na equação
54	18.ª	*Em lugar de* quantidade.....	annuidade
61	12.ª	*O segundo membro da equação* (1).....	$\frac{\left(\frac{Q}{a}+1\right)\cdot\tau-\left(\rho^{n+1}-1\right)}{(n+1)\cdot\frac{n}{2}\rho^{n-1}}$
85	8.ª	*Em lugar de* 691995.....	631995
99	3.ª	*Em lugar de* $\frac{t}{r^{n-1}}$	$\frac{t}{r^{n}-1}$
100	16.ª	*A equação do principio da linha*.....	$\frac{r^{n'}-1}{t}=\frac{1}{p_{n'}}$
107	14.ª	*Em lugar de* +.....	×
129	3.ª	*Em lugar de* PREMIO.....	JURO
171	Ultima	*O primeiro membro da equação*.....	$\frac{Q\times(1.06)^5}{(1.06)^8}$
311	Ultima	*Em lugar de* Tab. VII.....	Tab. VI

(1) Em muitos exemplares sahiu correcto.